Lévy 型過程
— 特に Jump 型過程について —

上村稔大 （関西大学システム理工学部）

この予稿は，飛躍型の Lévy 型過程の基本的事項と，その構成を，主に生成作用素からの構成という立場で論じたもので，2010 年度『確率論ヤングサマーセミナー』用に作成したものである．前半は，著者の理解のもとでの Lévy 過程の様々な特徴付けを述べた．後半では，Dirichlet 形式を用いた純飛躍型 Markov 過程の構成と，その標本路のいくつかの性質について紹介する．従って，Lévy 型過程に関して，この分野の研究を網羅的に解説したものではないことを予めお断りしておく．

1　イントロダクション： Lévy 過程の定義とその特徴付け

時間と共に変化する偶然現象を数学的にモデル化したものが確率過程であるが，その中でも Lévy 過程は，最も基本的なもののクラスである．ブラウン運動・ポアソン過程・安定過程はすべて Lévy 過程の典型例である．いずれも，独立増分であり，空間一様性をもつ確率過程となっている．

詳しく言うと，M= $\{X_t\}_{t\ge 0}$ が確率空間 $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ 上で定義された $\mathbb{R}^d$ を状態空間とする Lévy **過程**であるとは，次の四つの条件を満たすときをいう：

(i) 標本路 $t \mapsto X_t$ は右連続で，左極限を $\mathbb{P}$-a.s. でもつ.

(ii) $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1.$

(iii) $0 \le s \le t$ に対して，$X_t - X_s$ と X_{t-s} は同じ分布をもつ.

(iv) $0 \le s \le t$ に対して，$X_t - X_s$ は $\{X_u :\ 0 \le u \le s\}$ とは独立である.

さて，この定義だけからは，Lévy 過程がどの程度の広いクラスを (確率過程の族の中で) 形成しているのかは自明ではない． そこで，この節では Lévy 過程を特徴付けるいろいろな概念を用意し，Lévy 過程のもつ様々な性質を見ていくこととする．そうして，Lévy 過程が実に多くの顔をもつ確率過程であることを確認した後，その特徴付けの一つを通じて拡張される Lévy 型過程 (ここでは，特にジャンプ型の Feller 過程) について説明を行うつもりである．

1.1　無限分解可能分布 (Infinitely divisible distribution)

$\mathbb{R}^d$ 上の分布 μ が**無限分解可能分布**であるとは，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，適当な分布 μ_n が存在して，

$$\mu = \mu_n^{n*}$$

が成り立つときをいう．ここで，μ_n^{n*} は μ_n の n 個の**たたみ込み** (n-fold convolution) を表す：

$$\nu^{n*}(B) := \nu^{(n-1)*} * \nu(B) := \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbf{1}_B(x+y)\nu^{(n-1)*}(dx)\nu(dy), \quad \nu^{1*}(B) := \nu(B), \quad B \ \text{ Borel.}$$

次の定理により，Lévy 過程が無限分解可能分布で定義されることがわかる．詳しい Statement とその証明は，佐藤 [39] 及びその英訳 Sato [40] に詳しい：

定理 1.1 $\boldsymbol{X} = \{X_t\}$ を Lévy 過程とする．任意の $t \geq 0$ に対して，X_t の法則は無限分解可能分布である．逆に，μ を無限分解可能分布とすると，適当な Lévy 過程 $\boldsymbol{X} = \{X_t\}$ が存在して，μ が X_1 の法則となるように出来る．

実際に，無限分解可能分布と Lévy 過程とはどのように結びつくのであろうか．ここでは，Lévy 過程の定義を用いることによりそれが見て取れることを簡単に説明しておこう．

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$X_0 = 0$ $\mathbb{P}$-a.s. に注意すると，

$$X_t = (X_{t/n} - X_0) + (X_{2t/n} - X_{t/n}) + (X_{3t/n} - X_{2t/n}) + \cdots + (X_t - X_{(n-1)t/n}) \tag{1.1}$$

である． 右辺は n 個の独立同分布の確率変数の和であるから，X_1 の分布を μ とおくと，$X_{k/n}$ の分布は $\mu^{(k/n)*} = \mu^{(1/n)k*}$ であることがわかる[1]．よって，あとは t を有理数で上から近似することと， Lévy 過程の右連続性とを用いることにより，その極限として μ^{t*} が定義されることがわかると同時にそれが X_t の法則となる事がわかる．よって，μ が無限分解可能分布であることがわかる．逆に 無限分解可能分布 μ から Lévy 過程の構成は，Kolmogorov の拡張定理を援用することでなされる．

1.2 特性指数 (characteristic exponent)

特性指数と呼ばれる関数を定義する前に，**正定値関数** (nonnegative definite functions) について，先に説明しておく．これは，すぐ述べるが，有界な測度の Fourier 変換として表される関数として特徴付けられる．また，確率論においては，正定値関数は多くの場合，法則の特性関数として現れる．

関数 $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ が**正定値** (nonnegative definite) であるとは，任意の $m \in \mathbb{N}$ 及び任意の $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\sum_{j,k=1}^{m} \varphi(\xi_j - \xi_k)\lambda_j \overline{\lambda}_k \geq 0, \quad \text{for } {}^\forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} \tag{1.2}$$

が成り立つときを言う．

注意 1.1 正定値関数の集合全体は，凸錐 (convex cone) となっている．また，各点収束の位相で閉じていることがわかる．さらに，連続な正定値関数の全体を考えれば，局所一様収束の位相で閉じていることが示される．φ が正定値であれば，$\overline{\varphi}$, $\mathrm{Re}\,\varphi$ はどちらも正定値である．

正定値関数に関しては，次の Bochner の結果が基本的である．

[1]分布 μ に対して，その特性関数を $\hat{\mu}$ と表し，すべての t に対して，$\hat{\mu}(\xi)^t$ を $\hat{\mu}(\xi)^t := \exp\bigl(t \log \hat{\mu}(\xi)\bigr)$ によって定義する．もし $\hat{\mu}(\xi)^t$ がある分布の特性関数であるとき，その分布を μ^{t*} と書くことにする．

定理 1.2 (Bochner) 連続な関数 $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ が正定値であるための必要十分条件は，それが適当な $\mathbb{R}^d$ 上の有界測度 μ の Fourire 変換となっていることである：

$$\varphi(x) = \hat{\mu}(x)\Big(= \mathcal{F}\mu(x)\Big) := (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\mu(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

従って，特に $\mathbb{R}^d$ 上の分布の Fourier 変換は常に正定値関数となる．

定義 1.1 関数 $\psi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ が**負定値** (negative definite) であるとは， 任意の $m \in \mathbb{N}$ 及び $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\sum_{j,k=1}^{m}\Big(\psi(\xi_j) + \overline{\psi}(\xi_k) - \psi(\xi_j - \xi_k)\Big)\lambda_j\overline{\lambda}_k \geq 0, \quad \text{for } {}^\forall\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} \tag{1.3}$$

が成り立つときを言う．

次の定理が示すように負定値関数は，単に正定値関数の記号を変えただけのものではない．

定理 1.3 任意の関数 $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ に対して，次の条件はすべて同値である．

(i) f は負定値．

(ii) $f(0) \geq 0$, $f(x) = \overline{f(-x)}$, かつ任意の $m \in \mathbb{N}$, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \in \mathbb{R}^d$ 及び $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j,k=1}^{m} f(\xi_j - \xi_k)\lambda_j\overline{\lambda}_k \leq 0.$$

(iii) $f(0) \geq 0$ かつ，任意の $t \geq 0$ に対して，$\xi \mapsto e^{-tf(\xi)}$ は正定値関数．

注意 1.2 上の定理における (ii)-(iii) の同値性の主張は Schoenberg の定理と呼ぶこともある．

定理における条件 (ii) の系として，次が成り立つことがわかる：

系 1.1 $\phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ を正定値関数とすると，$\xi \mapsto \phi(0) - \phi(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ は負定値関数である．

例 1.1 以下の関数はすべて $\mathbb{R}^d$ 上の負定値関数となる．

(i) $\xi \mapsto \mathrm{constant}$ (ii) $\xi \mapsto i\ell\cdot\xi$ (iii) $\xi \mapsto \xi\cdot Q\xi$ (iv) $\xi \mapsto 1 - e^{i\langle y,\xi\rangle}$ (v) $\xi \mapsto 1 - \cos(\langle y,\xi\rangle)$

ただし $\ell, y \in \mathbb{R}^d$ であり Q は正定値の d 次の実正方行列を表す．上の定理により，次の関数も負定値であることもわかる：

(vi) $\xi \mapsto |\xi|^\alpha$, $(0 \leq \alpha \leq 2)$ (vii) $\xi \mapsto \log(1 + |\xi|^2)$

以上の準備により，無限分解可能分布に対する特性指数が定義される．

定理 1.4 μ を無限分解可能分布とすると，負定値の連続関数 $\psi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ で，

$$\psi(0) = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle}\mu(dx) = e^{-\psi(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

を満たすものがただ一つ存在する．この負定値関数 ψ のことを μ の**特性指数** (characteristic exponent) という．また，μ_1, μ_2 を共に無限分解可能分布とし，ψ_1, ψ_2 をそれぞれの特性指数とする．このとき，μ_1 と μ_2 のたたみ込み $\mu_1 * \mu_2$ は再び無限分解可能分布であり，更にその特性指数は $\psi_1 + \psi_2$ で与えられる．

さて，Lévy 過程 $\boldsymbol{X}=\{X_t\}$ に対して，各 X_t の法則は無限分解可能分布であった．そこで，

$$\psi_t(\xi) = -\log \mathbb{E}\Big[e^{i\langle\xi, X_t\rangle}\Big], \quad t \geq 0$$

とおけば，(1.1) より任意の自然数 m, n について

$$m\psi_1(\xi) = \psi_m(\xi) = n\psi_{m/n}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

が成り立つことがわかり，従って，任意の $t \geq 0$ について

$$-\log \mathbb{E}\Big[e^{i\langle\xi, X_t\rangle}\Big] = \psi_t(\xi) = t\psi_1(\xi) = -t\log \mathbb{E}\Big[e^{i\langle\xi, X_1\rangle}\Big] = -\log\Big(\mathbb{E}\Big[e^{i\langle\xi, X_1\rangle}\Big]\Big)^t, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

一方，X_1 の法則は μ であり，更に μ の特性指数を ψ としていることから，結局

$$\mathbb{E}\Big[e^{i\langle\xi, X_t\rangle}\Big] = \Big(\mathbb{E}\Big[e^{i\langle\xi, X_1\rangle}\Big]\Big)^t = \Big(\int_{\mathbb{R}^d} e^{it\langle\xi, x\rangle}\mu(dx)\Big)^t = e^{-t\,\psi(\xi)}, \quad t \geq 0 \tag{1.4}$$

が成立する．すなわち，Lévy 過程 $\boldsymbol{X}=\{X_t\}$ の特性関数は，すべて X_1 の特性指数で表現できることがわかる[2]．

定義 1.2 以下，X_1 の法則の特性指数 $\psi(\xi)$ を，Lévy **過程** $\boldsymbol{X}=\{X_t\}$ **の特性指数** (characteristic exponent) と呼ぶことにする．

特性指数は次の Lévy-Khintchine **公式**と結びついて初めて無限分解可能分布におけるその役割の重要性が浮かび上がってくる．実際は，特性指数は無限分解可能分布の研究の出発点となっており，無限分解可能分布に対応する特性指数のクラスを決定しているのである (see *e.g.*, [27, 12, 18])．

定理 1.5 (Lévy-Khintchine) 関数 $\psi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ が無限分解可能分布 μ の特性指数であるための必要十分条件は，適当な $a \in \mathbb{R}^d$, d 次の正定値正方行列 Q 及び $\int(1 \wedge |h|^2)\Pi(dh) < \infty$ を満たす $\mathbb{R}^d - \{0\}$ 上で定義された測度 Π が存在して，

$$\psi(\xi) = i\langle a, \xi\rangle + \frac{1}{2}\xi \cdot Q\xi + \int_{\mathbb{R}^d}\Big(1 - e^{i\langle\xi, x\rangle} + i\langle\xi, x\rangle\mathbf{1}_{|x|<1}\Big)\Pi(dx), \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

を満たすように出来るときである．

上の定理に出てくる $a \in \mathbb{R}^d$, 正定値正方行列 Q 及び測度 Π の組 (a, Q, Π) は Lévy characteristics と呼ばれている． 特に Π を Lévy 測度，Q を Gaussian coefficient あるいは**拡散係数**と呼び，確率論における意味づけを有する． $a \in \mathbb{R}^d$ に関しては，研究者により少しずつ異なった表示が用いられることがある．実際，cut-off 関数として，ここでは $\mathbf{1}_{|x|<1}$ を用いているが，$(1+|x|^2)^{-1}$ を採用する研究者もいる．その際には，Lévy 測度や拡散係数は変わらないが，a が次の a' に変化することに注意する必要がある：

$$a' = a + \int_{\mathbb{R}^d} x\Big(\frac{1}{1+|x|^2} - \mathbf{1}_{|x|<1}\Big)\Pi(dx).$$

[2] この議論は，もちろん，もう少し正確にのべる必要があり，しかるべき正当化が必要である (see: 脚注 1)．

1.3 空間に一様な推移確率 (temporary homogeneous transition probabilities)

さて，$\boldsymbol{X}=\{X_t\}$ を Lévy 過程とするとき，各 $t \geq 0$ に対して，再び X_t の法則を μ_t と表す：

$$\mu_t(B) := \mathbb{P}(X_t \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \tag{1.5}$$

分布の族 $\{\mu_t : t \geq 0\}$ は次の意味で**連続なたたみ込みの半群**となる：

$$\mu_s * \mu_t = \mu_{t+s}, \quad \lim_{t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu_t(dx) = f(0), \quad f \in C_b(\mathbb{R}^d). \tag{1.6}$$

但し，$C_b(\mathbb{R}^d)$ は $\mathbb{R}^d$ 上で定義された有界連続関数全体を表す.

実際，Lévy 過程の定義の条件 (iv) より，任意の $s, t \geq 0$ に対して，$X_{t+s} - X_s$ は X_s と独立であるから

$$\mu_{t+s}(B) = \mathbb{P}(X_{t+s} \in B) = \mathbb{P}\big(X_s + (X_{t+s} - X_s) \in B\big) = \mu_s * \mu_t(B)$$

が成り立つ．また f を $\mathbb{R}^d$ 上の有界連続関数とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ を

$$|x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(0)| < \varepsilon$$

を満たすようにとり，さらに $M := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$ とおくと，

$$\Big| \int f(x)\mu_t(dx) - f(0) \Big| \leq \int_{|x|<\delta} \big|f(x) - f(0)\big| \mu_t(dx) + 2M\mathbb{P}(|X_t| \geq \delta) < \varepsilon + 2M\mathbb{P}(|X_t| \geq \delta)$$

であるから，Lévy 過程の条件 (ii) から

$$\limsup_{t \downarrow 0} \Big| \int f(x)\mu_t(dx) - f(0) \Big| \leq \varepsilon$$

が成り立つ．ゆえに，$\varepsilon > 0$ は任意だったから，$\{\mu_t : t \geq 0\}$ の連続性がわかる.

また，$\boldsymbol{X}=\{X_t\}$ の有限次元分布，すなわち，$n \in \mathbb{N}$ 及び $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対する $(\mathbb{R}^d)^{n+1}$-値確率変数 $(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ の分布が，次式のように $\{\mu_t : t \geq 0\}$ を用いて表されることがわかる：

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) d\mathbb{P} = \int_{(\mathbb{R}^d)^{n+1}} & f(x_0, x_0 + x_1, x_0 + x_1 + x_2, \dots, x_0 + \cdots + x_n) \\ & \mu_0(dx_0)\mu_{t_1 - t_0}(dx_1)\mu_{t_2 - t_1}(dx_2) \cdots \mu_{t_n - t_{n-1}}(dx_n).\end{aligned} \tag{1.7}$$

逆に，$\mathbb{R}^d$ 上の分布の族が連続なたたみ込み半群 $\{\mu_t : t \geq 0\}$ を与えると，それによって，有限次元分布が (1.7) で与えられるような Lévy 過程を構成することが出来る（佐藤 [39] 参照）.

1.4 たたみ込み半群 (Convolution semigroups)

f を有界な連続関数とする．各 $t \geq 0$ に対して，

$$p_t f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)\mu_t(dy) \tag{1.8}$$

と定義すると，次を満たすことがわかる：

(sm1) (semigroup property)　$p_t p_s f = p_{t+s} f$,

(sm2) (continuity)　$\lim_{t\downarrow 0} p_t f = f, \quad f \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

また，μ_t が X_t の法則，すなわち $\mathbb{R}^d$ 上の分布であることから，

(sm3) (contraction property)　$\|p_t f\|_\infty \le \|f\|_\infty$

を満たす．また特に $\{\mu_t : t \ge 0\}$ は連続なたたみ込み半群であるから，

(sm4) (translation invariance)　$\tau_x p_t f = p_t(\tau_x f), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ f \in C_b(\mathbb{R}^d)$

が成り立つことがわかる．ただし，任意の関数 u 及び x に対して，$\tau_x u(y) = u(y-x)$ である．

逆に，$C_\infty(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素の集合族 $\{p_t : t \ge 0\}$ が (sm1)-(sm4) を満たせば，それは $\mathbb{R}^d$ 上の漠連続（関数解析では，weak-*continuous の意味）な sub-probability の族 $\{\mu_t : t \ge 0\}$ を用いて，(1.8) の形で書けることが知られている (see [26, 45])． また，特にその半群は Feller 半群であることが知られている：

$$p_t : C_\infty(\mathbb{R}^d) \longrightarrow C_\infty(\mathbb{R}^d), \quad t \ge 0,$$

ただし，$C_\infty(\mathbb{R}^d)$ は，無限遠で退化する連続関数全体を表す (これは一様ノルムの位相で $C_b(\mathbb{R}^d)$ の閉部分空間となっていることに注意する)． 実際 $f \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$ をとる．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$K > 0$ を

$$|x| \ge K \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| \le \varepsilon$$

を満たすように取る．一方，各 $t \ge 0$ に対して，μ_t は $\mathbb{R}^d$ 上の分布であることから，μ_t は tight である．十分大きい $L > 0$ をとると，$\mu_t(|x| \ge L) \le \varepsilon$ と出来る．すると $|x| \ge R+L$ 及び $|x+y| < R$ 満たす x, y に対しては $|y| \ge |x| - |x+y| \ge (R+L) - R = L$ となる．よって，$|x| \ge R+L$ に対して，

$$\begin{aligned} |p_t f(x)| &\le \int_{|x+y|\ge R} |f(x+y)|\mu_t(dy) + \int_{|x+y|<R} |f(x+y)|\mu_t(dy) \\ &< \varepsilon \cdot \mu_t(B(x;R)^c) + \int_{|y|\ge L} |f(x+y)|\mu_t(dy) \\ &\le \varepsilon + \varepsilon \cdot \|f\|_\infty = (1 + \|f\|_\infty)\varepsilon \end{aligned}$$

となり，Feller 性がわかる．

ところで，Bochner の定理，Schoenberg の定理及び特性指数の性質を組み合わせることにより，次の定理を得る：

定理 1.6 連続な正定値関数 ψ と，強連続な sub-Markov な convolution semigroup $\{p_t : t \ge 0\}$ の間には１対１の関係が存在する．その対応は

$$\mathcal{F}^{-1}\mu_t(\xi) = (2\pi)^{-d/2} e^{-t\psi(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

として与えられる．ただし，

$$p_t f(x) = \int f(x+y)\mu_t(dy), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{F}^{-1}\mu_t(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \xi, x\rangle}\mu_t(dx), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

である．

1.5 Lévy 過程と関連する線形作用素

ここでは，これまで見てきた Lévy 過程の直接的な見方を少し異なる側面から捉えることにする．そのために，記号を用意する．

Banach 空間 $(B, ||\cdot||)$ 上で定義された有界線形作用素の族 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ が B 上の **1 径数半群** (one-parameter semigroup) とは，$T_0 = \mathsf{Id}$ （恒等作用素）かつ B 上で条件 (sm1)：

$$T_t T_s = T_s T_t = T_{s+t}$$

を満たすときを言う．ここで，1 径数半群 $\{T_t\}$ が**強連続** (strongly continuous) であるとは B 上で (sm2) を満たすこと，すなわち，

$$\lim_{t\downarrow 0} ||T_t u - u|| = 0, \quad u \in B$$

が成り立つときを言う[3]．また，条件 (sm3):

$$||T_t u|| \leq ||u||, \quad u \in B$$

を満たすとき，**縮小半群** (contraction semigroup) という．

強連続な 1 径数半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ が与えられたとき，その**生成作用素** (infinitesimal generator) $(A, \mathcal{D}(A))$ は次の様に定義される：

$$Au := \lim_{t\downarrow 0} \frac{T_t u - u}{t} = \frac{d}{dt} T_t u \Big|_{t=0}, \quad u \in \mathcal{D}(A) := \Big\{ u \in B :\ \lim_{t\downarrow 0} \frac{T_t u - u}{t} \text{ exists strongly} \Big\}.$$

生成作用素は B 上稠密に定義された (densely defined)，一般には非有界な閉線形作用素となる．また縮小性より，次の**消散性** (dissipative property; accretive または monotone ともいう) が成り立つ：

$$||\lambda u - Au|| \geq \lambda ||u||, \quad \lambda > 0,\ u \in B.$$

ところで，$B = C_b(\mathbb{R}^d)$ または $B = C_\infty(\mathbb{R}^d)$ の場合には，A が**最大値原理** (positive maximum principle) を満たせば，A の消散性は導かれる：

$$u \in \mathcal{D}(A),\ u(x_0) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} u(x) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad Au(x_0) \leq 0.$$

実際，$u \in \mathcal{D}(A)$ 及び $\lambda > 0$ をとると，ある $x_0 \in \mathbb{R}^d$ で $|u(x_0)| = \|u\|_\infty \geq 0$ となる．このとき，$u(x_0) \geq 0$ としてよい (そうでなければ，u の代わりに $-u$ を考えよ)． すると，最大値原理により $\mathcal{A}u(x_0) \leq 0$ である．すると

$$\|\lambda u - Au\|_\infty \geq \lambda u(x_0) - Au(x_0) \geq \lambda u(x_0) = \lambda \|u\|_\infty$$

となり，消散性が満たされることがわかる．

Hille-Yosida による半群の理論は，線形作用素 A が，上で述べた強連続な縮小作用素の生成作用素となるための必要十分条件を与えるものである：

定理 1.7 (Hille-Yosida) Banach 空間 B 上の線形作用素 $(A, \mathcal{D}(A))$ が可閉で，その閉包 $\bar{A}$ が強連続な縮小半群の生成作用素となるための必要十分条件は次で与えられる：

[3]強連続な 1 径数半群のことを C_0-semigroup と呼ぶこともあるが，これは "Cesàro summable of order 0" を省略化したものである (see [16]).

(a) $\mathcal{D}(A)$ は B の稠密な部分空間である.

(b) A は消散作用素である.

(c) ある $\lambda > 0$ について，$\lambda - A$ の値域が B において稠密な部分集合である.

また，$B = C_\infty(\mathbb{R}^d)$ として考えた場合，上の定理は更に次の様になる：

系 1.2 (Hille-Yosida-Ray) Banach 空間 $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ 上の線形作用素 $(A, \mathcal{D}(A))$ が可閉で，その閉包 $\bar{A}$ が強連続で，正値な 縮小半群の生成作用素となるための必要十分条件は次で与えられる：

(a) $\mathcal{D}(A)$ は $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ の稠密な部分空間である.

(b) A は最大値原理を満たす.

(c) ある $\lambda > 0$ について，$\lambda - A$ の値域が $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ において稠密な部分集合である.

ここで，半群 $\{T_t\}$ が**正値** (positive or positivitiy preserving) であるとは,

$$u \in C_\infty(\mathbb{R}^d), \quad u \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad T_t u \geq 0, \quad t \geq 0.$$

を満たすときを言う.

定義 1.3 $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ 上の強連続で，正値な縮小半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を Feller 半群 (Feller semigroup) と呼ぶ．Feller 半群の生成作用素のことを，Feller 作用素 (Feller generator) と呼ぶこともある.[4]

ここで，Feller 半群がなぜ，確率過程の構成に有効に働くかというと，Riesz の定理により，それが積分表示出来ることにある：

定理 1.8 $\{T_t :\ t \geq 0\}$ を Feller 半群とする．すると，$[0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上に sub-probability 核の集合族 $\{p_t(x, dy)\}$ が一意的に存在して,

$$T_t u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(y) p_t(x, dy), \quad u \in C_\infty(\mathbb{R}^d),\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d$$

を満たすように出来る．更に，次の Champman-Kolmogorov の公式が成り立つ.

$$p_{t+s}(x, A) = \int_{\mathbb{R}^d} p_t(y, A) p_s(x, dy), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ t, s, \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

また Feller 半群が平行移動不変性 (sm4) を満たせば，上の定理で現れる核 p_t は空間一様性：

$$p_t(x, B) = p_t(0, B - x), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

を満たすことがわかる．従って，$p_t(0, dx)$ はたたみ込み半群となる．但し，$B - x = \{y - x :\ y \in B\}$.

強連続な 1 径数半群が与えられれば，一つのアプローチとして Feller 性を確認することにより，sub-probability 核を構成することが出来る．しかも，それが **マルコフ過程** (Markov process，詳しくは強マルコフ過程) の推移関数として実現できることが知られている (例えば，[10, 17] 等を見

[4] Feller 性の概念は，本により少しずつ異なる．ここで定義した Feller 半群を [37, III.6] では，Feller-Dynkin 半群と呼んでいる．代わりに推移半群 $\{p_t\}$ が $p_t : C_b \longrightarrow C_b$ を満たすとき，$\{p_t\}$ を Feller 半群と呼んでいる.

よ)．また，そのような半群であれば，Hille-Yosida-Ray の定理により，その生成作用素 $(A,\mathcal{D}(A))$ は，$C_\infty(\mathbb{R}^d)$ 上の最大値原理を満たす閉作用素であることがわかる．コンパクト台をもつ滑らかな関数全体 $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を A が**芯** (core)[5]として持てば，更に A は次の表示を持つことが示される (例えば，[13], [29, **vol**.1, Theorem 4.5.21])：

定理 1.9 (Courrége) $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ が線形作用素 A の芯であり，A がもし $\mathcal{D}(A)$ において最大値原理を満たせば，適当な関数 $a_{ij}, b_j, c : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ 及び $\mathbb{R}^d \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上の核 ν で，

$$c(x) \leq 0, \quad \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^d$$

を満たし，また c 及び b_j は連続関数であり，

$$x \mapsto \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

は上半連続なものとして取れ，任意の $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対し，

$$\begin{aligned} Au(x) &= \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + c(x)u(x) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d}\Big(u(y) - u(x) - \sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)(y_j - x_j)\mathbf{1}_{B(1)}(y-x)\Big)\nu(x,dy) \end{aligned} \tag{1.9}$$

満たすものが存在する．

とくに A が Feller generator ならば**擬微分作用素** (pseudo differential operator) であることもわかる：

定理 1.10 (Courrége) 線形作用素 $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow C_\infty(\mathbb{R}^d)$ が Feller 半群の生成作用素であり，$\mathcal{D}(A) \supset C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を満たすものとする．このとき，$(-A, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ は擬微分作用素である：

$$Au(x) = -p(x,D)u(x) := -(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} p(x,\xi)\hat{u}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

但し，$\hat{u}$ は関数 u の Fourier 変換を表す．また，$p(x,\xi)$ は (x,ξ) ついて局所有界な関数であり，$x \in \mathbb{R}^d$ を固定するごとに $\xi \mapsto p(x,\xi)$ は連続な負定値関数である．関数 $p : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ を A の**表像** (symbol) という． さらに，p は次の Lévy-Khinchine 表示を持つ：

$$\begin{aligned} p(x,\xi) &= c(x) - i\sum_{j=1}^d b_j(x)\xi_j + \sum_{k,j=1}^d a_{kj}(x)\xi_k\xi_j \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d}\Big(1 - e^{i\langle y-x,\xi\rangle} + i(y-x)\cdot\xi\,\mathbf{1}_{B(1)}(y-x)\Big)\nu(x,dy), \quad x,\xi \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

ただし，c, b_j, a_{ij} 及び ν は前定理で現れたものである．

[5] $(A,\mathcal{D}(A))$ を Banach 空間 B 上の閉作用素とする．このとき，$\mathcal{D}(A)$ の部分集合 $\mathcal{C}$ が A の**芯** (core) であるとは，$(A,\mathcal{C})$ の閉包が $(A,\mathcal{D}(A))$ と一致するときをいう．

上の定理で，生成作用素 A が "定数係数" である場合，すなわち，$p(x,\xi)$ が x に依存しないように取ることが出来る場合を考える．これはまさしく古典的な Lévy-Khinchine 公式であり，対応するのは Lévy 過程である：

系 1.3 任意の連続な負定値関数 $\psi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ に対して，適当な Lévy characteristics (a, Q, Π) が存在して，

$$\psi(\xi) = i\langle a, \xi\rangle + \frac{1}{2}\xi \cdot Q\xi + \int_{\mathbb{R}^d}\Big(1 - e^{i\langle x,\xi\rangle} + i\langle x, \xi\rangle \mathbf{1}_{|x|<1}\Big)\Pi(dx), \quad \xi \in \mathbb{R}^d \tag{1.10}$$

という表示されることが分かる．また逆に，三つ組み (a, Q, Π) を用いて，(1.10) の右辺で定義される関数 ψ は連続な負定値関数である．

よって，定理 1.5 により，分布 μ が無限分解可能分布であるための必要十分条件は，その特性指数が適当な定数，関数と測度の組を用いて，(1.10) で表現できることである．

1.6 たたみ込み半群と Dirichlet 形式

はじめに，たたみ込み半群 $\{\mu_t : t \geq 0\}$ が次の対称性を満たしているとする：

(sm5) (symmetry) $\quad \mu_t(A) = \mu_t(-A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ t \geq 0.$

このとき, (1.4) に対称性の条件 (sm5) を用い，Lévy-Khinchine の公式を組み合わせると，次が成り立つことがわかる：

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle\xi,x\rangle}\mu_t(dx) = e^{-t\psi(\xi)}, \qquad \psi(\xi) = \frac{1}{2}\xi \cdot Q\xi + \int_{\mathbb{R}^d}\Big(1 - \cos(\langle\xi, x\rangle)\Big)\nu(dx),$$

但し，Q は正定値対称な d 次正方行列であり，ν は,

$$\nu(A) = \nu(-A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}), \quad \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}(1 \wedge |h|^2)\nu(dx) < \infty$$

を満たす測度である．このとき $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の二次形式 (Dirichlet 形式という) を

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u,v) &:= \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\psi(\xi)dx, \\ \mathcal{D}[\mathcal{E}] &:= \Big\{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\big|\hat{u}(\xi)\big|^2\psi(\xi)d\xi < \infty\Big\} \end{cases}$$

と定義する．但し，$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-d/2}\int e^{i\langle\xi,x\rangle}dx.$

Q が単位行列で $\nu = 0$ であれば，$\psi(\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$ となる．すると，上の二次形式は

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\,|\xi|^2 dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx =: \frac{1}{2}\mathbb{D}(u,v).$$

となり，古典的な Dirichlet 積分と一致する．

$Q = 0$ であれば，Parseval の公式により

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^d\times(\mathbb{R}^d\setminus\{0\})}\Big(u(x+h) - u(x)\Big)\Big(u(x+h) - u(x)\Big)\nu(dh)dx \tag{1.11}$$

と書き表されることがわかる．

Dirichlet 形式は，古典的な Dirichlet 積分の Hilbert 空間論的な公理化として，Beurling と Deny によって 1959 年に導入されたものである ([8])．福島正俊 ([19]) は, 1971 年に正則な Dirichlet 形式に対して，対称マルコフ過程を構成することに成功し，さらにそれらが 1 対 1 の関係にあることを見いだした (see also [20, 23])．

ここで，簡単に Dirichlet 形式について説明しておこう: X を局所コンパクトな可分距離空間とし，m をその上の正値 Radon 測度で，その台は X 全体とする．自乗可積分な実関数の空間 $L^2(X;m)$ の稠密な線型部分空間 $\mathcal{F}$ に対して，その直積 $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ 上で定義された対称双線型形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が $L^2(X;m)$ 上の Dirichlet 形式であるとは，以下の条件を満たすときをいう：

($\mathcal{E}$-1) $\mathcal{E}$ は非負値： $\mathcal{E}(u,u)\geq 0$, for $\forall\ u\in\mathcal{F}$.

($\mathcal{E}$-2) $\mathcal{E}$ は閉. すなわち，内積 $\mathcal{E}_1(u,v)=\mathcal{E}(u,v)+(u,v)_m$ に関して実 Hilbert 空間となっている．ここで，$(u,v)_{L^2}$ は m に関する L^2-内積を表す.

($\mathcal{E}$-3) $\mathcal{E}$ は Markov 性を持つ，すなわち，$u\in\mathcal{F}$ ならば，$v=(0\vee u)\wedge 1\in\mathcal{F}$ であり，

$$\mathcal{E}(v,v)\leq\mathcal{E}(u,u).$$

Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対して，非正な自己共役作用素 L が,

$$(\sqrt{-L}u,\sqrt{-L}v)_{L^2}=\mathcal{E}(u,v),\quad u,v\in\mathcal{F}=\mathcal{D}[\sqrt{-L}] \tag{1.12}$$

として定まり，その生成する半群 e^{tL} は **($\mathcal{E}$-3)** より，マルコフ半群となることがわかる，すなわち，$f\in L^2(X;m)$ が $0\leq f\leq 1$ m-a.e. をみたせば　$0\leq e^{tL}f\leq 1$ m-a.e. となる．

Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が**正則** (regular) であるとは，$C_0(X)$ をコンパクトな台をもつ X 上の連続関数全体としたとき，$\mathcal{F}\cap C_0(X)$ が $C_0(X)$ において一様ノルムに関して稠密であり，更に $\mathcal{F}$ の中で内積 $\mathcal{E}_1$ の作るノルムに関して稠密なときをいう．正則な Dirichlet 形式には，対称 Hunt 過程 $\boldsymbol{M}=(X_t,\mathbb{P}_x)$ が存在して,

$$e^{tL}f(x)=\mathbb{E}_x[f(X_t)]\quad m\text{-a.e.}\quad\text{for } f\in L^2(X;m)\cap\mathcal{B}(X)$$

と表示できる (see *e.g.* [23])．逆に，右連続な道を持つ Markov 過程 $(X_t,\mathbb{P}_x)$ が m-対称，すなわち,

$$\int_X\mathbb{E}_x[f(X_t)]g(x)m(dx)=\int_X f(x)\mathbb{E}_x[g(X_t)]m(dx)$$

を満たすとすると，$p_tf(x)=\mathbb{E}_x[f(X_t)]$ は $L^2(X;m)$ 上の自己共役作用素に拡張され，それは強連続なマルコフ半群 $\{T_t:t\geq 0\}$ を構成する．このとき，この生成作用素 L を用いて (1.12) により Dirichlet 形式が定義される．対称 Markov 過程の生成する Dirichlet 形式という場合はこれを指す．一般に，(同じ Dirichlet 形式に対応した) 二つの Markov 過程は次の意味で “同値” である:

適当な**除外集合** (exceptional set) と呼ばれる測度 0 の集合 N （詳しくは容量 0 の集合）があって，N 以外の全ての x について推移関数が一致する．

言い換えると，Dirichlet 形式に対応する Markov 過程は，除外集合に対する ambiguity が存在する．従って,

いつ，その同値関係を満たす Markov 過程の中から “良い”ものを見つけ (られ) るか？

という問題が生じる．もちろん，これに答えるための研究というものは数多く存在する．その一つとして，Markov 過程の推移半群の Feller 性を示すというものがある．これにより，対応する Markov 過程として，その同値な class の中から Feller 過程を取り出すことが出来る ([42])．また，同値関係において出現する除外集合を小さくしていく，という方向の研究もある (see *e.g.* [33],[22],[21])．

$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を正則な Dirichlet 形式とすると，Beurling-Deny **の分解公式**と呼ばれる次の公式が知られている：

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u,v) &= \frac{1}{2}\int_X d\mu^c_{\langle u,v\rangle} + \iint_{X\times X-d}\bigl(\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)\bigr)\bigl(\tilde{v}(x)-\tilde{v}(y)\bigr)J(dx,dy)\\ &\quad + \int_X \tilde{u}(x)\tilde{v}(x)k(dx), \quad u,v\in\mathcal{F}.\end{aligned} \tag{1.13}$$

この表示の仕方は一意的である．それぞれ diffusion part, jumping part, killing part とよばれる．ここに $\tilde{u}$ は関数 u の準連続修正とする．

この小節の最後に (必ずしも対称とは限らない) 空間一様な Dirichlet 形式にたたみ込み半群が対応することを述べておく．すると，それがいつも Feller 半群を生成することがわかるので，§1.4 の結果より (空間一様な)Dirichlet 形式から構成される確率過程の同値性に対する ambiguity が解消されることがわかる[6]．以下，簡単にそれを Berg-Forst[9] にそって述べておこう．

(複素)Hilbert 空間 $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d;m)$ 上の半線形形式[7]$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が (非対称な) 空間一様な Dirichlet 形式であるとは,

($\mathcal{E}$-1)’ (positive definiteness) $\quad \mathfrak{Re}\,\mathcal{E}(u,u)\geq 0, \quad u\in\mathcal{F}.$

($\mathcal{E}$-2)’ (strong sector condition) 適当な定数 $C>0$ が存在して，任意の $u,v\in\mathcal{F}$ に対して，

$$\bigl|\mathcal{E}(u,v)\bigr| \leq C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}(u,u)}\cdot\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}(v,v)}$$

が成り立つ．但し，$\widetilde{\mathcal{E}}(u,v) := \dfrac{\mathcal{E}(u,v)+\overline{\mathcal{E}(u,v)}}{2} = \mathfrak{Re}\,\mathcal{E}(u,v),\ u,v\in\mathcal{F}.$

($\mathcal{E}$-3)’ (closedness) $\mathcal{F}$ は次の内積で Hilbert 空間となる：

$$\widetilde{\mathcal{E}}(u,v)+(u,v)_{L^2}, \quad u,v\in\mathcal{F}.$$

($\mathcal{E}$-4)’ (translation invariance) 任意の $u,v\in\mathcal{F}$ 及び $x\in\mathbb{R}^d$ に対して，

$$\tau_x u, \tau_x v\in\mathcal{F}, \quad \mathcal{E}(\tau_x u,\tau_x v)=\mathcal{E}(u,v)$$

が成り立つ．但し，$\tau_x u(y)=u(y-x)$.

($\mathcal{E}$-1)’-($\mathcal{E}$-3)’ より，$\mathcal{E}$ には，対応する Markov 半群 $\{T_t : t\geq 0\}$ や，生成作用素 $(A,\mathcal{D}(A))$ が $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ 上で対応することが示される．更に，**($\mathcal{E}$-4)’** が成り立つことと T_t が τ_x と交換可能であることが同値となることがわかる：

$$\tau_x T_t u = T_t\tau_x u, \quad x\in\mathbb{R}^d,\ t\geq 0,\ u\in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d,dx).$$

[6]一般論としての非対称 Dirichlet 形式についての解説は，例えば [32] を見よ．

[7]$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が半線形形式とは，$u,v,w\in\mathcal{F}$, $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して，$\mathcal{E}(\alpha u+v,w)=\alpha\mathcal{E}(u,w)+\mathcal{E}(v,w)$, $\mathcal{E}(u,v)=\overline{\mathcal{E}(v,u)}$ を満たすときを言う

定理 1.11 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を空間一様な Dirichlet 形式とする．このとき，連続な負定値関数 $\psi:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{C}$ が存在して，適当な $C>0$ について，

$$\big|\mathfrak{Im}\,\psi\big|\le C\cdot\mathfrak{Re}\,\psi \tag{1.14}$$

及び

$$\mathcal{F}=\Big\{u\in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d):\ \int_{\mathbb{R}^d}|\hat{f}(\xi)|^2\mathfrak{Re}\,\psi(\xi)d\xi<\infty\Big\} \tag{1.15}$$

であり，$u,v\in\mathcal{F}$ に対して，

$$\mathcal{E}(u,v)=\int_{\mathbb{R}^d}\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\psi(\xi)d\xi. \tag{1.16}$$

と書ける．逆に，$\psi:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{C}$ を連続な負定値関数で，条件 (1.14) を満たすとする．このとき，(1.16), (1.15) で定義される半線形形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は，$L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ 上の空間一様な Dirichlet 形式となる．

例 1.2 Lévy 過程の例を挙げておく．

(1) (Poisson Processes)

各 $\lambda>0$ に対して，$k=0,1,2,\dots,$ に集中する確率分布 μ_λ を考える：

$$\mu_\lambda(\{k\}):=\frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda},$$

すなわち，パラメーター λ をもつ Poisson 分布を考える．すると，簡単な計算で

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{i\theta k}\mu_\lambda\big(\{k\}\big)=e^{-\lambda(1-e^{i\theta})}=\Big(e^{-\frac{\lambda}{n}\left(1-e^{i\theta}\right)}\Big)^n$$

がわかる．最右辺は，パラメーター λ/n をもつ独立な Poisson 分布の n 個の和の特性関数である．従って，Lévy-Khintchine の公式から,（無限分解可能な）分布 μ_λ は Lévy characteristic $(0,0,\lambda\delta_1)$ をもつ Lévy 過程に対応する．これを Poisson 過程と呼ぶ．ただし，δ_1 は $\{1\}$ に集中する Dirac 測度である．対応する Poisson 過程を $\{N_t:t\ge0\}$ と表せば，各 $t>0$ に対して，N_t はパラメーター λt をもつ Poisson 分布に従うことがわかる．さらに,

$$\mathbb{E}[e^{i\theta N_t}]=e^{-\lambda t(1-e^{i\theta})}$$

となることから，characteristic exponent は $\psi(\theta)=\lambda(1-e^{i\theta})$, $\theta\in\mathbb{R}$ で与えられることがわかる．このとき，$\{N_t:t\ge0\}$ は intensity **$\boldsymbol{\lambda}$ を持つ** Poisson **過程**と呼ぶことがある．

(2) (compound Poisson processes)

$\{N_t:t\ge0\}$ を，intensity $\lambda>0$ を持つ Poisson 過程とする．$\{\xi_i:i\in\mathbb{N}\}$ は $\{N_t:t\ge0\}$ とは独立な独立同分布 (IID) の確率変数列で，平均が 0 で原点に mass をもたない共通の分布 F に従っているとする．このとき，$\sum_1^0=0$ という規約の下で,

$$X_t=\sum_{k=1}^{N_t}\xi_k,\quad t\ge0$$

で与えられる確率過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ を compound Poisson process とよぶ．各 $\theta\in\mathbb{R}$ に対して，Ω を $\{N_t=k\}_{k=0}^{\infty}$ で分割し，全確率の法則を用いることにより，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{i\theta X_t}] &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}[e^{i\theta X_t}|N_t=k]\mathbb{P}(N_t=k)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}[e^{i\theta\sum_{i=1}^{k}\xi_i}|N_t=k]\frac{(t\lambda)^k}{k!}\,e^{-t\lambda}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int_{\mathbb{R}}e^{i\theta x}F(dx)\Big)^k\,\frac{(t\lambda)^k}{k!}\,e^{-t\lambda}\\ &= e^{-t\lambda\int_{\mathbb{R}}(1-e^{i\theta x})F(dx)}.\end{aligned}$$

特に，$t=1$ とすると，

$$\mathbb{E}[e^{i\theta X_1}]=e^{-\lambda\int_{\mathbb{R}}(1-e^{i\theta x})F(dx)}=\Big(e^{-\frac{\lambda}{n}\int_{\mathbb{R}}(1-e^{i\theta x})F(dx)}\Big)^n$$

より，最右辺は $a=-\lambda\int_{0<|x|<1}xF(dx)$, $Q=0$, $\Pi(dx)=\lambda F(dx)$ としたきの Lévy characteristic $(-\lambda\int_{0<|x|<1}xF(dx),0,\lambda F(dx))$ を持つ無限分解可能分布の Lévy-Khintchine 表示となっている．特に $F(dx)$ が， 点 1 に unit mass を持つ Dirac 測度であれば，無限分解可能分布は Poisson 分布に他ならない．

このときの characteristic exponent ψ は次で与えられることがわかる：

$$\psi(\theta)=\lambda\int_{\mathbb{R}}(1-e^{i\theta x})F(dx),\quad \theta\in\mathbb{R}.$$

(3) ((linear) Brownian motion)

$\gamma\in\mathbb{R}$ 及び $\sigma>0$ に対して，平均 γ, 分散 σ^2 を持つ Gauss 分布 (正規分布) $\mu_{\gamma,\sigma}$ を考える：

$$\mu_{\gamma,\sigma}(A):=\int_A\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-(x-\gamma)^2/\sigma^2}dx,\quad A\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}),$$

このとき，

$$\int_{\mathbb{R}}e^{i\theta x}\mu_{\gamma,\sigma}(dx)=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2+i\theta\gamma}=\Big[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\theta^2+i\theta\frac{\gamma}{n}}\Big]^n$$

となることがわかるから，Gauss 分布 $\mu_{\gamma,\sigma}$ は無限分解可能分布となる．このときの Lévy characteristic は $a=-\gamma$, $Q=\sigma$, $\Pi(dx)=0$ であり，characteristic exponent は $\psi(\theta)=\sigma^2\theta^2/2-i\theta\gamma$ である．そうして，対応する Lévy 過程は，Brown 運動に線形の Drift 項をつけたものである：

$$X_t=\sigma B_t+\gamma t,\quad t\geq 0,$$

ただし，$\{B_t:t\geq 0\}$ は standard Brownian motion である．

(4) stable processes

Lévy 過程 $\{X_t:t\geq 0\}$ は次の性質を満たすとき，**狭義安定過程** (strict stable process) と呼ばれる： 任意の $a>0$ に対して，適当な $b>0$ が存在して，

$$X_{at}\ \stackrel{d}{=}\ bX_t,\quad t\geq 0,$$

を満たす． ここで，$\overset{d}{=}$ は，右辺と左辺とが同分布であることを意味する．以下，μ を X_1 の法則とするとき，μ は原点に集中していないものとする．すなわち，$\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mu(\{0\}) = 1$ となるものを除いて考える．このとき，次が成り立つことが知られている (see: *e.g.* Section VI.1 in [18])：

定理 $b = a^{1/\alpha}$ $(0 < \alpha \le 2)$ という定数だけが可能である．

この α を狭義安定過程の**指数** (exponent) と呼ぶ． μ に対応する特性指数 ψ は次のように与えられる ([39]): $0 < \alpha \le 2$ かつ $\alpha \ne 1$ のとき，

$$\psi(\xi) = c|\xi|^{\alpha}\Big\{1 - i\beta\Big(\tan\big(\frac{\pi\alpha}{2}\big)\operatorname{sgn}\xi\Big)\Big\}, \quad c > 0,\ \beta \in [-1, 1].$$

$\alpha = 1$ のとき，

$$\psi(\xi) = c|\xi| - i\tau\xi, \quad c > 0,\ \tau \in \mathbb{R}.$$

$\alpha = 2$ のときは $\psi(\xi) = c|\xi|^2$ であるから，$\{X_t : t \ge 0\}$ は Brownian motion $\{\sqrt{2c}B_t : t \ge 0\}$ である．

一般次元 d の場合，指数 α の狭義安定過程で**回転不変**なもの，すなわち，分布 μ が任意の d-次直交行列 U に対して

$$\mu(B) = \mu(U^{-1}B), \quad B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$$

を満たすものは次の形の特性指数 ψ 及び，Lévy characteristic (a, Q, Π) を持つ (see: e.g., [39])：

$$\psi(\xi) = c(d,\alpha)\,|\xi|^{\alpha}, \quad a = 0, \quad Q = 0, \quad \Pi(dx) = \frac{1}{c(d,\alpha)}\,|x|^{-d-\alpha}dx.$$

この場合の狭義安定過程を**回転不変な対称安定過程** (rotational invariant, symmetric stable process) とよぶことがある．

以下，狭義の安定分布で $0 < \alpha < 2$ のときを考える．このとき，この特性指数に対応するたたみ込み半群を $\{\nu_t : t \ge 0\}$ で表す．すると，§1.6 で与えた Dirichlet 形式は，Parseval の等式を用いると次の様になる事がわかる ([2, chapter 2]) ：

$$\mathcal{E}(u,v) = c(d,\alpha)\int_{\mathbb{R}^d}\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}|\xi|^{\alpha}d\xi = \frac{1}{c(d,\alpha)}\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\frac{\big(u(x)-u(y)\big)\big(v(x)-v(y)\big)}{|x-y|^{d+\alpha}}dxdy.$$

特に，定数 $c(d,\alpha)$ は

$$c(d,\alpha) = \frac{2^{-\alpha+1}\pi^{\frac{d+1}{d}}}{\Gamma\big(\frac{\alpha}{2}+1\big)\,\Gamma\big(\frac{\alpha+d}{2}\big)\sin\frac{\pi\alpha}{2}}$$

で与えられる．

□

Lévy 過程のいろいろな特徴付けを駆け足で述べ，そうして最後に代表的な例をいくつかここでは述べた．

より広範の Lévy 過程及びその拡張について解説した著書としては，[39, 38, 40, 7, 1] の他に [44, 29] 等がある．またサーベイ論文として Bass による論文 [6] がある．最近の話題も含めて解説したものとして，例えば 国際研究会『Lévy Processes』の報告集である [3] に掲載されている論文（例

えば，Sato, Applebaum, Jacob-Schilling, Maejima 等）の参考文献を参照してもらうと，最近の Lévy 過程研究の動向の一端を知る手がかりを与えてくれる．

ここで述べたことを基礎にして，次節以降で，特に飛躍型の Lévy 型過程について考えて行くことにする．これは Lévy characteristic (a, Q, Π) において，$Q = 0$ のときに対応するものを考えることに相当し，Dirichlet 形式では，分解公式 (1.13) において，diffusion part 及び killing part がない場合を考えることに相当する． 次の節において，それらの拡張の一つとして，"Lévy 型過程" の構成を (1.11) を拡張した形で与える（対称な）Dirichlet 形式を用いて行い，対応する確率過程の基本的性質について考察する．

注意 1.3 この講義では，基本的に（飛躍型の）確率過程の**構成**について議論をすることにするが，確率過程研究の主な目的は，確率過程がどのような性質を持つのか，あるいは，それがどのような現象を表しているのかを考えることであると思う．構成や分類だけで終わるのではなく，それがどのような確率現象を引き起こしているのか，あるいはどんな偶然現象を捉えているのかを考えてみることが重要である．実際，伊藤 清先生は,「確率論」([28, 第 5 章]) において，

> 確率過程は解析学における関数に相当するもので，確率論では最も重要な概念である．解析学に可測関数，連続関数，解析関数というような関数の一般概念があるように，確率論にも，マルチンゲール，加法過程，Markov 過程，定常過程のような確率過程の一般概念がある．また解析学に指数関数，Bessel 関数のような特殊関数があるように，確率論にも Wiener 過程，Poisson 過程のような特殊確率過程がある．さらには，微分方程式，超関数に対応して，確率微分方程式，確率超過程がある．しかし解析学における関数の分類や微分方程式の型を直訳しても確率論で興味あるものが得られるわけではない．確率過程の直感的背景である偶然現象の時間的変動を念頭において理論を展開することにより，確率論独自の興味があり，かつ有用な理論が生まれるのである．

と述べておられる．

2 Symmetric Jump Processes

飛躍型 Markov 過程の研究は，Lévy 過程の研究を除けば，ここ 20 年余りの間に本格的に始まったと言ってよい．もちろん，拡散過程の境界過程として，飛躍型過程は自然に現れるので，研究そのものは全くなされていなかったわけではない．

ここでは，たたみ込み半群に対応する Dirichlet 形式 (1.11) の自然な拡張として，

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u,v) &= \dfrac{1}{2}\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d-\Delta}\big(u(x)-u(y)\big)\big(u(x)-u(y)\big)n(x,dy)m(dx) \\ \mathcal{D}[\mathcal{E}] &= \Big\{u\in L^2(\mathbb{R}^d;m):\ \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d-\Delta}\big(u(x)-u(y)\big)^2 n(x,dy)m(dx)<\infty\Big\} \end{cases} \tag{2.1}$$

を考える．ただし，$\Delta := \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^d\}$． また m は $\mathbb{R}^d$ 上の正値 Radon 測度であり，その位相的台は $\mathbb{R}^d$ 全体であるとする．$n(x, dy)$ は各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して，$\mathbb{R}^d$ 上の Radon 測度であり，各 $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ に対しては，x に関する非負値可測関数とする．また，次の対称性の条件を満たすものとする：

$$n(x, dy)m(dx) = n(y, dx)m(dy) \tag{2.2}$$

例えば，$m(dx) = dx$ （dx は $\mathbb{R}^d$ 上の Lebesgue 測度), $n(x, dy) = c|x-y|^{-d-\alpha}dy$ とすれば，これは特性指数 α の（回転不変で対称な）安定過程に対応する Dirichlet 形式となる．

(2.1) で定義される $\mathcal{E}$ は，明らかに対称な双線形形式であり，また

$$\mathcal{E}(u,u)=\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d-\Delta}\big(u(x)-u(y)\big)^2 n(x,dy)m(dx)\geq 0$$

より，§1.6 における一つ目の条件である "非負値性" は満たしている．また，Markov 性も形から成り立つことは分かる． 問題は閉性及び正則性についてであるが，次の命題が以降の議論では基本的となる：

命題 2.1 (see: *e.g.,* [23, Example 1.2.4], [49] or [42]) m 及び $n(x,dy)$ は (2.2) を満たすとする．
このとき，$\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ が $\mathbb{R}^d$ 上のコンパクト台を持つ Lipschitz 連続な関数全体 $C_0^{\mathrm{lip}}(\mathbb{R}^d)$ を含むための必要十分条件は，関数 $x\mapsto\int_{y\neq x}\big(1\wedge|x-y|^2\big)n(x,dy)$ が局所的に m-可積分となることである：

$$\int_{y\neq\bullet}\big(1\wedge|\bullet-y|^2\big)n(\bullet,dy)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;m)\quad\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}\quad\mathcal{D}[\mathcal{E}]\supset C_0^{\mathrm{lip}}(\mathbb{R}^d).$$

□

従って，

$$\Psi(x):=\int_{y\neq x}\big(1\wedge|x-y|^2\big)n(x,dy),\ x\in\mathbb{R}^d$$

に対して，$\Psi\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;m)$ を仮定する．すると，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は $L^2(\mathbb{R}^d;m)$ 上の正則な (対称) Dirichlet 形式となる．ただし，

$$\mathcal{F}:=\overline{C_0^{\mathrm{lip}}(\mathbb{R}^d)}^{\sqrt{\mathcal{E}_1}},\quad\mathcal{E}_1(u,v):=\mathcal{E}(u,v)+\int_{\mathbb{R}^d}u(x)v(x)m(dx),\quad u,v\in C_0^{\mathrm{lip}}(\mathbb{R}^d).$$

よって，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ には m-対称な Hunt 過程が対応することがわかる．しかも $\mathcal{E}$ の形から，その Hunt 過程は純飛躍型 (pure jump) Markov 過程となることが分かる．

以下 M$=(X_t,\mathbb{P}_x)$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する m-対称な Hunt 過程とし，その推移関数を p_t とおく：

$$p_tf(x):=\mathbb{E}_x[f(X_t)],\quad t\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ f\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d).$$

§1.6 でも述べたように，$\{T_t:t\geq 0\}$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する L^2-半群とすると，

$$T_tf(x)=p_tf(x),\quad m\text{-a.e. }x\in\mathbb{R}^d,\quad f\in L^2(\mathbb{R}^d;m)\cap\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$$

である．詳しくは，より細かい" 容量零 (capacity 0) を除いて一致する "ことがわかるのであるが，ここでは深く立ち入らない．

Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ あるいは，対応する Jump 過程 M$=(X_t,\mathbb{P}_x)$ が**保存的** (conservative) であるとは，

$$T_t1=1\ \ m\text{-a.e.},\quad t\geq 0$$

が成り立つことを言う．言い替えると，

$$\mathbb{P}_x(X_t\in\mathbb{R}^d)=1,\quad m\text{-a.e.},\quad t\geq 0$$

であること，すなわち，どんな時刻 $t\geq 0$ に対しても標本路がほとんどすべての出発点に対して状態空間 $\mathbb{R}^d$ にとどまっていることである．Lévy 過程は空間一様に動くことから，途中で爆発が起きたり，どこかで吸収されることはない，従って空間内にずっととどまることから，自動的に保存的であることがわかる．しかし，一般の確率過程はそうであるとは限らない．

保存性が成り立つためのいろいろな（十分）条件は知られているが，ここでは，[34] による次の結果を述べておく．

定理 2.1 ([34, Theorem 3.1]) 任意の $a > 0$ に対して，

$$e^{-a|\cdot|} \in L^1(m)$$

とする．このとき，もし $\Psi \in L^\infty(m)$ であれば，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は保存的である．

Ψ が有界であるという条件は，非常に強い．Ψ は直感的には，拡散過程の拡散係数に相当する関数と解釈できる．拡散過程においては，拡散係数は例えば $|x| \to \infty$ のとき，$|x|^2 \log |x|$ の order で発散しても保存性は成り立つことが知られている (see *e.g.*, [15], [47])．しかしながら，拡散過程と異なり，飛躍型過程は標本路が連続ではないため，従来の解析学の手法がうまく働かない．従って，いろいろなアイデアが必要となってくる．新しいアイデアだけでなく，細かい（泥臭い？）計算も行う必要がある．もちろん，保存性が成り立たない条件を探すことも重要な問題である．

次では，[49, 50] に沿って “対称安定型過程”及び “(回転不変な) 対称 Lévy 過程” の再帰性・非再帰性について考えていくことにする．

2.1 symmetric stable-type processes

この節では，$n(x, dy)$ が m に対して絶対連続な場合：

$$n(x, dy) = n(x, y)m(dy)$$

で，更に $n(x, y)$ が次の二つの場合について考えていくことにする．どちらの場合も簡単のため，m は Lebesgue 測度とする．

(a) 適当な可測関数 $\alpha : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して，

$$n(x, y) := |x - y|^{-d-\alpha(x)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d,\ x \neq y,$$

(b) 適当な可測関数 $\tilde{\alpha} : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して，

$$n(x, y) := |x - y|^{-d-\tilde{\alpha}(|x-y|)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d,\ x \neq y,$$

このとき，先の命題 2.1 は次の様にそれぞれ書き換えられることがわかる：

命題 2.2

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u, v) &= \dfrac{1}{2} \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d - \Delta} \big(u(x) - u(y)\big)\big(u(x) - u(y)\big) n(x, y) dx dy \\ \mathcal{D}[\mathcal{E}] &= \Big\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d; m) : \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d - \Delta} \big(u(x) - u(y)\big)^2 n(x, y) dx dy < \infty \Big\} \end{cases}$$

とする[8]．このとき，$\mathcal{D}[\mathcal{E}] \supset C_0^{\mathsf{lip}}(\mathbb{R}^d)$ となるための必要十分条件は $n(x, y)$ が (a),(b) のそれぞれの場合に応じて次のようになる：

[8](a) の場合，$n(x, y)dydx$ は対称性の条件 (2.2) を一般には満たさないが，線形形式としては対称となっている：$\mathcal{E}(u, v) = \mathcal{E}(v, u)$

(a) $n(x,y)=|x-y|^{-d-\alpha(x)}$ の場合：

(i) $0<\alpha(x)<2,\ \ a.e.\ x\in\mathbb{R}^d,$

(ii) $\dfrac{1}{2-\alpha},\dfrac{1}{\alpha}\in L^1_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}^d),$

(iii) $^{\exists}K\subset\mathbb{R}^d$ (compact set) s.t. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d\setminus K}|x|^{-d-\alpha(x)}dx<\infty.$

(b) $n(x,y)=|x-y|^{-d-\tilde{\alpha}(|x-y|)}$ の場合：

$$\int_0^\infty(1\wedge u^2)u^{-1-\tilde{\alpha}(u)}du<\infty.$$

どちらの場合も，$\alpha(x)\equiv\alpha$ (resp. $\tilde{\alpha}(t)\equiv\alpha$)，$0<\alpha<2$ のときは（回転不変な対称な）安定過程に対応する Lévy 測度である．そこで，(a) の核に対応する対称 Markov 過程を "**対称安定型過程** "(symmetric stable-like processes) と呼ぶことにする ([49])．(b) の核に対応するものは**回転不変な対称** Lévy **過程**である．

$\{T_t:t\geq 0\}$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する L^2-半群とする．このとき，T_t は縮小半群であることから，

$$S_tf(x):=\int_0^t T_sf(x)ds,\quad f\in L^2(\mathbb{R}^d)$$

は Riemann 和の $L^2(\mathbb{R}^d)$ 内での強収束極限として確定する．また，S_t は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の線形作用素であり，有界性

$$\|S_tf\|_{L^2}\leq t\|f\|_{L^2},\quad f\in L^2(\mathbb{R}^d)$$

を満たす．そこで，$f\in L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)$ 及びコンパクト集合の増大列 $K_n\subset\mathbb{R}^d$ で，$K_n\subset K_{n+1}\nearrow\mathbb{R}^d$ を満たすものをとる．T_t の対称性と Markov 性から

$$\int_{K_n}|T_tf(x)|dx\leq\int_{\mathbb{R}^d}T_t|f|(x)1_{K_n}(x)dx=\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|T_t1_{K_n}(x)dx\leq\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|dx.$$

$n\to\infty$ として，$\|T_tf\|_{L^1}\leq\|f\|_{L^1}$，$f\in L^1\cap L^2$ を得る．同様に $\|S_tf\|_{L^1}\leq t\|f\|_{L^1}$，$f\in L^1\cap L^2$ も得られるから，$\{T_t\},\{S_t\}$ はそれぞれ $L^1(\mathbb{R}^d)$ 上の線形作用素に一意的に拡張されて，

$$T_sT_tf=T_{s+t}f,\quad\|T_tf\|_{L^1}\leq\|f\|_{L^1},\quad\|S_tf\|_{L^1}\leq t\|f\|_{L^1},\ f\in L^1(\mathbb{R}^d)$$

を満たし，$T_t,\frac{1}{t}S_t$ はともに Markov 的である． このように，Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ から決まる L^1 上の線形作用素 S_t は，任意の $f\in L^1_+(\mathbb{R}^d):=\{f\in L^1(\mathbb{R}^d):\ f\geq 0\}$ に対して，正値性と単調性を満たす：

$$0\leq S_sf\leq S_tf\quad\text{a.e.},\ \ 0<s<t.$$

よって，

$$Gf(x)=\lim_{t\to\infty}S_tf(x)\ (\leq\infty)\ \ \text{a.e.},\quad f\in L^1_+(\mathbb{R}^d)$$

によって，$\mathbb{R}^d$ 上に a. e. で定義された関数 Gf が，Lebesgue 零集合を除いて一意的に決まる． そうして次の定義が可能となる．

定義 2.1 (i) 推移関数 $\{p_t : t \geq 0\}$ または Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が**過渡的** (transient) であるとは，$\{x \in \mathbb{R}^d : g(x) = 0\}$ が Lebesgue 零集合であるような任意の $g \in L^1_+(\mathbb{R}^d)$ に対して，Gg がほとんど至るところ有限となるときをいう．

(ii) $\{p_t : t \geq 0\}$ または Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が**再帰的** (recurrent) であるとは，任意の非負値関数 $f \in L^1_+(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$Gf = 0 \quad \text{または } \infty \quad a.e.,$$

すなわち，$\{x \in \mathbb{R}^d : 0 < Gf(x) < \infty\}$ が Lebesgue 零集合となることである．

注意 2.1 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ あるいは対応する jump 過程が再帰的であることの条件として，次のように与えることも出来る： 任意の内点を持つ開集合 $O \subset \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\int_0^\infty \mathbb{P}_x(X_t \in O)dt = \infty \quad \text{a.e. } x.$$

ここで，安定型過程の過渡性・再帰性の結果を述べるまえに，Lévy 過程及び安定過程の場合の結果を先に述べておく：

定理 2.2 Ψ を負定値関数とする．また $r > 0$ を任意に取って固定しておく．このとき，Ψ を特性指数に持つ Lévy 過程が再帰的であるための必要十分条件は,

$$\limsup_{\gamma \downarrow 0} \int_{B(r)} \mathfrak{Re}\Big(\frac{1}{\gamma + \Psi(\xi)}\Big) d\xi = \infty$$

が成立することである．次に，$\Psi(\xi) = c|\xi|^\alpha$ である場合を考える．すなわち，Ψ は狭義安定過程に対応する特性指数とする．

(i) $d = 1$ のとき，$0 < \alpha < 1$ のときは狭義安定過程は過渡的であり，$1 \leq \alpha \leq 2$ のときは再帰的である．

(ii) $d \geq 2$ のとき，$0 < \alpha < 2$ であれば狭義安定過程は過渡的である．

これらと比較をすることにより，対称安定型過程の再帰的・過渡的となるための十分条件が得られる：

定理 2.3 (see [49, 50])

(a) (対称安定型過程) 命題 2.2 (a) の条件を満たす関数 $\alpha : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して，
$n(x, y) = |x - y|^{-d-\alpha(x)},\ x, y \in \mathbb{R}^d,\ x \neq y$ となる場合．

(1) $d = 1$ とする．このとき，次の二つの条件が満たされるとき，対称安定型過程は再帰的である：

$$\cdot \quad \limsup_{R \to \infty} \int_{B(R)} \Big(\frac{1}{2 - \alpha(x)} + \frac{1}{\alpha(x)}\Big) R^{-\alpha(x)} dx < \infty,$$

$$\cdot \quad \limsup_{R \to \infty} \int_{B(2R)} \Big(\int_{\mathbb{R}^d - B(3R)} |x - y|^{-1-\alpha(x)} dx\Big) dy < \infty.$$

(2) 適当な定数 β（ただし，$d \geq 2$ のときは $0 < \beta < 2$，$d = 1$ のときは $0 < \beta < 1$）が存在して，

$$\alpha(x) \leq \beta \quad \text{a.e.}$$

を満たすとき，対称安定型過程は過渡的である．

(b) (回転不変な対称 Lévy 過程) 命題 2.2 (b) の条件を満たす関数 $\tilde{\alpha} : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して，$n(x, y) = |x - y|^{-d-\tilde{\alpha}(|x-y|)}$，$x, y \in \mathbb{R}^d$，$x \neq y$ となる場合．

(1) $$\limsup_{R\to\infty} R^{-2+d} \int_0^R u^{1-\tilde{\alpha}(u)} du < \infty \quad \text{かつ} \quad \limsup_{R\to\infty} R^d \int_R^\infty u^{1-\tilde{\alpha}(u)} du < \infty$$

を満たすとき，回転不変な対称 Lévy 過程は再帰的である．

(2) 適当な定数 $K > 0$ と $\tilde{\beta}$ （ただし，$d = 2$ のときは $0 < \tilde{\beta} < 2$，$d = 1$ のときは $0 < \tilde{\beta} < 1$）が存在して，

$$\tilde{\alpha}(u) \leq \tilde{\beta}, \quad \text{a.e. } u \in [K, \infty)$$

を満たすとき，回転不変な対称 Lévy 過程は過渡的である．$d \geq 3$ のときは，回転不変な対称 Lévy 過程は常に過渡的である．

例 2.1 一次元対称安定型過程の場合について考える： $n(x, y) = |x - y|^{-1-\alpha(x)}$.

このとき，次のいずれの場合も対称安定型過程は再帰的である．

(1) $-\infty < a < b < \infty$，$0 < c < 2$ 及び $1 \leq \alpha < 2$ に対して，

$$\alpha(x) = \begin{cases} c, & a < x < b, \\ \alpha, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(2) $0 < c < 2$，$a \geq e$ 及び $\varepsilon \geq 1$ に対して，

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 - \big(\log|x|\big)^{-\varepsilon}, & |x| \geq a, \\ c, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(3) $0 < c < 2$，$a \geq 1$ 及び $0 < \varepsilon \leq 1$ に対して，

$$\alpha(x) = \begin{cases} 2 - |x|^{-\varepsilon}, & |x| \geq a, \\ c, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(3) の場合で，もし $0 < c \leq 1$ とすれば，$|x| < a$ を満たす点 x は polar set（あるいは exceptional set ともいう）であるから point recurrent ではない．一方，任意の $x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]$ は non-polar であり，従って point recurrent であることがわかる．Lévy 過程では，一般に point recurrence は dichotomy（すなわち，すべての点で point recurrent かすべての点でそうでないか）が成立するが，この場合はそれが混在している． □

この小節では，再帰性・過渡性に限って話を進めてきたが，対称な Lévy 過程に限ってもまだまだ分かっていないことも多い．たとえば，熱核 (transition density) の存在も一般には分かっていな

い．いわゆる，Sobolev の不等式や，ultracontractivity 等が成り立てば，存在することは分かっている．それに基づいて，拡散過程などで精力的に成されている熱核の Gauss 型などの評価行われている．これに関しては，より一般の metric measure space 上での jump 過程の熱核の評価を行ったものとして，Chen, Kim and Kumagai による論文 [11] のみあげておく．

（独り言） 漠然と Jump 型確率過程を考えても，収拾が付かないほど多様な性質が表れるため，とても統一的に扱うことは出来ない． これまで，2 節で説明したような Jump 型の対称 Dirichlet 形式について主に研究を行ってきた．しかし，正直に告白すると，擬微分作用素の理論に関する専門家である R. Schilling 氏と共同研究を行った際，擬微分作用素，あるいはそれに対応する表像 (symbol) がどの程度 Dirichlet 形式に利用できるのか知りたかったのであるが，表像にかなりの滑らかさがなければ，殆ど使い物にならないということだけがわかった．それ以降，敢えて彼ら（の理論）とは距離をおくような形で議論を進めることを意図的に行ってきた．もちろん，擬微分作用素が有効に働くクラスは存在するし，それを用いた詳しい標本路の性質も導出可能である (例えば [41])．またここで述べたような結果を彼らがどのように理解するのかを知りたいとも思う．

ここで議論したのは，確率過程の道の性質のうち，再帰性・非再帰性及び保存性だけである．しかもわかったのは十分条件にすぎない．より詳しい結果や，それ以外の例えば，密度関数（density）の存在や，その詳しい挙動の考察など，まだまだやるべきことは山ほどある．しかし，先にも述べたが，古典的な解析の手法が使えない場合が多く，空間の何らかの情報を用いて解析を進めたり，Lévy 核 ν や基礎の測度 m に何らかの条件（例えば，対称性，回転不変性や平行移動不変性，あるいはそれらに換わる条件など）を課して解析を進めていく必要がある．いろいろな人が寄って集ってやっていくのがいいのかもしれない．

参考文献

[1] D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, 2nd edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **93**, Cambridge University Press, 2009

[2] N. Aronszajn and K.T. Smith, Theory of Bessel potentials. I, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **11** (1961), 385-475

[3] O.E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch and S.I. Resnick (editors), *Lévy Processes − Theory and Applications*, Birkhäuser, 2001

[4] R.F. Bass, Occupation time densities for stable-like processes and othre pure jump Markov processes, *Stoch. Proc. Appl.*, **29** (1988), 65-83

[5] R.F. Bass, Uniqueness in law for pure jump Markov processes, *Probab. Th. Rel. Fields*, **79** (1988), 271-287

[6] R. F. Bass, Stochastic differential equations with jumps, *Probability Survey*, **1** (2004), 1-19

[7] J. Bertoin, *Lévy Processes*, Cambridge Tracts in Mathematics **121**, Cambridge University Press, 1996

[8] A. Beurling and J. Deny, Dirichlet spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **45** (1959), 208-215

[9] C. Berg and G. Forst, Non-symmetric translation invariant Dirichlet forms, *Invent. Math.*, **21** (1973), 199-212

[10] R.M. Blumenthal and R.K. Getoor, *Markov Processes and Potential Theory*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 2007

[11] Z.-Q. Chen, P. Kim and T. Kumagai, On Heat kernel estimates and parabolic Harnack inequality for jump processes on metric measure spaces, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, **25** (2009), 1067–1086

[12] K.L. Chung, *A course in probability theory*, 3rd Edition, Academic Press, 2001

[13] P. Courrége, Sur la forme intégro-difféntielle des opérateurs de C_K^∞ dans C satisfaisant au principe du maximum, *Sémin. Théorie du Potentiel* (1965/66) exposé 2, 38pp

[14] E.B. Davies, *One-Parameter Semigroups*, Academic Press, London, 1980.

[15] E.B. Davies, Heat kernel bounds, conservation of probability and the Feller property, Festschrift on the occasion of the 70th birthday of Shmuel Agmon, *J. Anal. Math.*, **58** (1992), 99–119.

[16] K.L. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Graduate Texts in Mathematics **194**, Springer-Verlag, 2000

[17] S.N. Ethier and T.G. Kurtz, *Markov Processes –Characterization and Convergence–*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley Interscience,1986.

[18] W.E. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, 2nd edition, vol.2, Wiley, 1971

[19] M. Fukushima, Dirichlet spaces and strong Markov Processes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **165** (1971), 185-224

[20] 福島 正俊, ディリクレ形式とマルコフ過程, 紀伊國屋数学叢書 5, 紀伊国屋書店, 1975

[21] M. Fukushima,Two topics related to Dirichlet forms: quasi- everywhere convergence and additive functionals, in: Dell'Antonio, G. and U. Mosco (eds.), *Dirichlet Forms*, Springer, Lect. Notes Math. vol. **1563**, Berlin 1993, 21–53.

[22] M. Fukushima and H. Kaneko, On (r, p)-capacities for general Markovian semigroups, in: Albeverio, S. (ed.), *Infinite dimensional analysis and stochastic processes*, Pitman, Res. Notes Math. vol. **124**, Boston (MA) 1985, 41–47.

[23] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, De Gruyter Studies in Mathematics **19**, Walter De Gruyter Inc, 1994

[24] 福島　正俊, 竹田　雅好, マルコフ過程，確率論 教程シリーズ 4, 倍風館，2008

[25] W. Hoh, The martingale problem for a class of pseudo-differential operators, *Math. Ann.*, **300** (1994), 121-147

[26] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Grundlehren math. Wiss. Bd. 256, 1983

[27] K. Itô, *Lectures on stochastic processes*, Tata Institute of Fundamental Research, Springer-Verlag, 1961

[28] 伊藤　清, 確率論，岩波基礎数学選書，岩波書店，1991

[29] N. Jacob, *Pseudo-Differential Operators and Markov Processes*, **Vol. 1-3**, Imperial College Press, 2001-2005

[30] T. Komatsu, Markov processes associated with certain integro-differential operators, *Osaka J. Math.*, **10** (1973), 271-303

[31] T. Komatsu, On the martingale problem for generators of stable processes with perturbations, *Osaka J. Math.* **21** (1984), 113-132

[32] Z.-M. Ma and M. Röckner, *Introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms*, Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1992

[33] P. Malliavin, Implicit functions in finite corank on the Wiener space, in: Itô, K. (ed.), *Proceedings Taniguchi Symp. Stoch. Anal. Katata and Kyoto 1982*, North-Holland, Math. Libr. vol. **32**, Amsterdam 1984, 369–386.

[34] J. Masamune and T. Uemura, Conservation property of symmetric jump processes, to appear in *Ann. Inst. Henri Poincaré - Probab. Stat.*,

[35] A. Negoro, Stable-like processes: construction of the transition density and the behavior of sample paths near $t = 0$, *Osaka J. Math.* **31** (1994), 189-214

[36] S. Port and C.J. Stone, Infinitely divisible processes and their potential thoery, I and II, *Ann. Inst. Fourier* **21** (1971), Fasc.2, 157-275 and Fasc. 4, 179-265

[37] L.C.G. Rogers and D. Williams, *Diffusions, Markov Processes and Martingales* **Vol.** 1, Foundations, 2nd Edition, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 1994

[38] G. Samorodnitsky and M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*, Chapman & Hall, 1994

[39] 佐藤 健一, 加法過程, 紀伊国屋数学叢書 33, 紀伊國屋書店, 1990

[40] K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distribution*, Studies in Advanced Mathematics **68**, Cambridge University Press, 1999

[41] R.L. Schilling, Growth and Hölder conditions for the sample paths of Feller processes, *Probab. Theor. Rel. Fields*, **112** (1998), 565 - 611.

[42] R. L. Schilling and T. Uemura, On the Feller property of Dirichlet forms generated by pseudo differential operators, *Tohoku Math. J.* **59** (2007), 401–422.

[43] Y. Shiozawa and T. Uemura, Stability of Feller property for non-local operators under bounded perturbations, *Glasnik Matematicki*, **45** (2010), 155-172

[44] A.V. Skorohod, *Random Processes with Independent Increments*, Kluwer Academic Publishers, 1991

[45] E.L. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Mathematical Series **30**, Princeton University Press, 1970

[46] D.W. Stroock, Diffusion processes associated with Lévy generators, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **32** (1975), 209-244

[47] M. Takeda, On a martingale method for symmetric diffusion processes and its applications, *Osaka J. Math.*, **26** (1989), 605–623.

[48] M. Tsuchiya, Lévy measure with generalized polar decomposition and the associated SDE with jumps, *Stoch. Stoch. Rep.*, **38** (1992), 95-117

[49] T. Uemura, On some path properties of symmetric stable-like processes for one dimension, *Potential Analysis*, **16** (2002), 79-91

[50] T. Uemura, On symmetric stable-like processes: some path properties and generators, *J. Theoret. Probab.*, **17** (2004), 541–555.