On conservativeness of symmetric jump processes

上村稔大 （関西大学システム理工学部）

1 はじめに

ジャンプ型確率過程に対する保存性の研究は最近いろいろな人によりなされてきている．特にジャンプ型過程に対する熱核の評価を導出する際には，その保存性が重要な役割を果たす.

ところで，拡散過程の保存性の研究に関しては，状態空間の体積増大度との関連で非常に sharp な結果が 90 年代半ばまでに得られているが，ジャンプ型過程に関してはその立場で見た研究は非常に少ない．最近 [MU11] や [GHM11] により，適当な指数増大度のもとで対称なジャンプ過程の保存性が成り立つことが示された．そこで，一つ目の講演では，主に [MU11](あるいは [GHM11]) に沿って，対称なジャンプ型過程の保存性を，それを規定する Lévy 核 (jump rate) と，状態空間の適当な体積増大度の条件とともに見ていくことにする．

二つ目の講演では，[SU11] に沿って，基礎の測度は Lebesgue 測度に固定して，Lévy 核の遠方での増大度によって保存性が成立することを紹介する．これは，$\mathbb{R}^d$ 上の拡散過程の保存性が，拡散係数の $x \to \infty$ における増大度に応じて成立することの類似である．

2 保存性の定義と一般的結果

X を局所コンパクトで可分な距離空間，m をその上の台が X 全体である正値 Radon 測度する．また，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(X;m)$ 上の正則な対称 Dirichlet 形式とする．$\{T_t, t>0\}$ を対応する L^2 上の強連続半群とする．

このとき，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ あるいは $\{T_t, t>0\}$ が**保存的** (conservative) であるとは，

$$T_t 1 = 1 \quad m\text{-a.e.}, \quad \text{for } t>0$$

が成り立つときを言う．Dirichlet 形式の保存性の必要十分条件は，Oshima [O92] による次の結果が知られている (see also [FOT11, Theorem 1.6.6])：

定理 2.1 以下の条件は同値である：

(i) $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が保存的である．

(ii) 次を満たす関数列 $\{u_n\} \subset \mathcal{F}$ が存在する：

$$0 \le u_n \le 1, \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 1 \ m\text{-}a.e., \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n, v) = 0 \quad \text{for any } v \in \mathcal{F} \cap L^1(X;m).$$

$\mathsf{M} = (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \xi, \mathbb{P}_x)$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する m-対称 Hunt 過程とすると，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が保存的であることと

$$\mathbb{P}_x(\xi = \infty) = 1, \quad \text{q.e. } x \in X$$

が成り立つこととは同値である．すなわち，$\mathcal{E}$ が保存的であるというのは，粒子 (確率過程) が有限時間内に空間を出たり，途中で死滅したりしないと言うことである．

次に $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対応する L^2 上の生成作用素とすると，

$$\mathcal{E}(u,v) = -(\mathcal{A}u, v), \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),\ v \in \mathcal{F}$$

が成り立つ．次の系は Oshima の保存性の結果を生成作用素の条件で書き換えたものである：

系 2.1 ([IU04, Lemma 3.2]) $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ を Dirichlet form $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の生成作用素とし，更に次をみたす関数列 $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ が存在するとする：

$$\sup_{n\geq 1} \|\varphi_n\|_\infty < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 1 \quad \text{for} \quad m\text{-}a.e.\ x \in X,$$

$$\sup_{n\geq 1} \|\mathcal{A}\varphi_n\|_\infty < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{A}\varphi_n(x) = 0 \quad \text{for} \quad m\text{-}a.e.\ x \in X.$$

このとき，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は保存的である．

3 設定と結果

3.1 Case 1

(X, m) を前節と同じものとする．$\mu(x, dy)$ を $X \times \mathcal{B}(X)$ 上の核とし，二次汎関数

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{2} \iint_{x\neq y} \big(u(x) - u(y)\big)\big(v(x) - v(y)\big)\mu(x,dy)m(dx).$$

を考える．ただし，u, v は右辺の積分が意味を持つような可測関数とする．

次の条件を考える：

Assumption (A):

(1) $\mu(x,dy)m(dx)$ は $X \times X \setminus \mathsf{diag}$ [1] 上対称な測度である： $\mu(x,dy)m(dx) = \mu(y,dx)m(dy)$.

(2) $M := \sup_{x\in X} \int_{y\neq x} \Big(1 \wedge d(x,y)^2\Big)\mu(x,dy) < \infty.$

Assumption (A) のもと，$(\mathcal{E}, C_0^{\mathsf{lip}}(X))$ は $L^2(X;m)$ 上の可閉な Markov 的二次形式となる．よって，

$$\mathcal{E}_1(u,v) = \mathcal{E}(u,v) + \int_X u(x)v(x)m(dx)$$

とおき，この内積による $C_0^{\mathsf{lip}}(X)$ の閉包を $\mathcal{F}$ と表せば，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は $L^2(X;m)$ 上の正則な対称 Dirichlet 形式となる．[2] よって Fukushima's existence theorem により，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対応する m-対称 Hunt 過程 $\mathsf{M} = (X_t, \mathbb{P}_x)$ が存在する．また，この Hunt 過程は純飛躍型過程，すなわちジャンプ型過程となっている．

この小節での主結果は次の定理である：

定理 3.1 ([GHM11, Theorem 1.3]) 各 $x \in X,\ r > 0$ に対して $V(x,r) := m(B(x,r))$ とおく．但し，$B(x,r) = \{y \in X :\ d(x,y) < r\}$．このとき，ある $x_0 \in X$ が存在して，

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\ln V(x_0, r)}{r \ln r} < \frac{1}{2}$$

が成り立てば，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は保存的である．

[1] diag は対角線集合である： $\mathsf{diag} = \{(x,x) : x \in X\}$

[2] 正則性を出すだけなら，(2) は次の条件に緩和される：$M(\bullet) := \int_{y\neq\bullet} \Big(1 \wedge d(\bullet, y)^2\Big)\mu(\bullet, dy) \in L^1_{\mathsf{loc}}(X;m)$.

注意 3.1 [MU11] では，より強い次の条件の下で保存性を示している：

$$e^{-rd(x_0,\bullet)} \in L^1(X;m), \quad \forall\, r>0.$$

例 3.1 (symmetric stable-like process) $X=\mathbb{R}^d$, $m(dx)=dx$ (Lebesgue 測度) とする． いま可測関数 $\alpha:\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{E}(u,v)=\frac{1}{2}\iint_{x\neq y}\frac{\big(u(x)-u(y)\big)\big(v(x)-v(y)\big)}{|x-y|^{d+\alpha(x)}}dxdy, \quad u,v\in C_0^{\mathsf{lip}}(\mathbb{R}^d)$$

とおく．このとき，適当な正数 $\underline{\alpha},\overline{\alpha}$ が存在して，

$$0<\underline{\alpha}\leq \alpha(x)\leq \overline{\alpha}<2 \quad \text{for} \quad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^d$$

を満たすとする．すると，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の正則な Dirichlet 形式となる．但し，$\mathcal{F}:=\overline{C_0^{\mathsf{lip}}(\mathbb{R}^d)}^{\sqrt{\mathcal{E}_1}}$. 更に，**Assumption (A)** 及び定理 3.1 の条件を満たすので，対応する対称安定型過程は保存的である．

3.2 Case 2

ここでは，$X=\mathbb{R}^d$ 及び基礎の測度は Lebesgue 測度 dx として議論を進める．この小節では，Lévy 核 $\mu(x,dy)$ が適当な Radon 測度 n を用いて，

$$\mu(x,dy)=k(x,y)n(dy)$$

と書けている場合について考える．また，次の条件を考える．

Assumption (B):

(1) Radon 測度 n は，次の意味で対称である：

$$n(A)=n(-A), \quad A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

但し，$-A=\{-x : x\in A\}$.

(2) $\gamma(x):=|x|^2+4, \quad x\in\mathbb{R}^d$ とおく．このとき $M_1,M_3\in L^2_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}^d)$，かつ $M_2\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ を満たす：

- $M_1(x):=\displaystyle\int_{0<|h|<\frac{\sqrt{\gamma(x)}}{2}}|h|^2k_s(x,x+h)n(dh)$,
- $M_2(x):=\displaystyle\int_{|h|\geq\frac{\sqrt{\gamma(x)}}{2}}k_s(x,x+h)n(dh)$,
- $M_3(x):=\displaystyle\int_{0<|h|<\frac{\sqrt{\gamma(x)}}{2}}|h|\cdot\big|k_s(x,x+h)-k_s(x,x-h)\big|n(dh), \quad x\in\mathbb{R}^d$.

但し，$k_s(x,y)=\dfrac{1}{2}\Big(k(x,y)+k(y,x)\Big)$.

命題 3.1 **Assumption (B)** のもと，

$$\begin{cases}\mathcal{E}(u,v) &:= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\int_{h\neq 0}\big(u(x)-u(y)\big)\big(v(x)-v(y)\big)k(x,x+h)n(dh)dx \\ \mathcal{D}(\mathcal{E}) &:= \Big\{u\in L^2(\mathbb{R}^d):\ \mathcal{E}(u,u)<\infty\Big\}\end{cases}$$

は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の Dirichlet 形式となり，$\mathcal{D}(\mathcal{E}) \supset C_0^{\mathsf{lip}}(\mathbb{R}^d)$ を満たす．$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $(\mathcal{E}, C_0^{\mathsf{lip}}(\mathbb{R}^d))$ の閉包を表し，また $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の (L^2)-生成作用素とする：

$$\mathcal{E}(u,v) = -(\mathcal{A}u, v), \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),\ v \in \mathcal{F}.$$

このとき，$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \supset C_0^2(\mathbb{R}^d)$ であり，更に $C_0^2(\mathbb{R}^d)$ の上では $\mathcal{A}$ は次の表示をもつことが分かる：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}u(x) &= \int_{h\neq 0} \Big(u(x+h) - u(x) - \nabla u(x)\cdot h 1_F(x)\Big) k_s(x, x+h) n(dh) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{F(x)} \nabla u(x)\cdot h \Big(k_s(x,x+h) - k_s(x,x-h)\Big) n(dh), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad u \in C_0^2(\mathbb{R}^d).\end{aligned}$$

但し，$F(x) = \Big\{h \in \mathbb{R}^d :\ 0 < |h| < \dfrac{\sqrt{\gamma(x)}}{2}\ \Big\},\ \ x \in \mathbb{R}^d.$

さて，保存性が成立するための条件を更に述べよう：

Assumption (C): **Assumption (B)**(2) で定義された関数 M_1, M_2, M_3 が以下を満たす：

- $\displaystyle \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{M_1(x)}{\gamma(x)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{1}{\gamma(x)} \int_{0<|h|<\frac{\sqrt{\gamma(x)}}{2}} |h|^2 k_s(x,x+h) n(dh) < \infty,$
- $\displaystyle \sup_{x\in\mathbb{R}^d} M_2(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{|h|\geq \frac{\sqrt{\gamma(x)}}{2}} k_s(x,x+h) n(dh) < \infty,$
- $\displaystyle \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{M_3(x)}{\sqrt{\gamma(x)}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sqrt{\gamma(x)}} \int_{0<|h|<\frac{\sqrt{\gamma(x)}}{2}} |h|\cdot \Big|k_s(x,x+h) - k_s(x,x-h)\Big|\ n(dh) < \infty.$

系 2.1 を用いることにより，次の結果が成り立つことが分かる：

定理 3.2 **Assumption (B)**(1) 及び **Assumption (C)** を仮定すると，Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は保存的である．

References

[FOT11] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, 2nd rev. and ext. ed., Walter de Gruyter, 2011.

[GHM11] A. Grigor'yan, X.-H. Huang and J. Masamune, On stochastic completeness of jump processes, to appear in *Math. Z.*, 2011

[IU04] Y. Isozaki and T. Uemura, A family of stable-like processes and its global path properties, *Probab. Math. Statist.*, **24** (2004), 145-164.

[MU11] J. Masamune and T. Uemura, Conservation property of symmetric jump processes, *Ann. Inst. Henri Poincaré - Probab. Statist.*, **47** (2011), 650-662

[O92] Y. Oshima, On conservativeness and recurrence criteria for Markov processes, *Potential Anal.*, **1** (1992), 115-131.

[SU11] Y. Shiozawa and T. Uemura, Explosion of jump-type symmetric Dirichlet forms on $\mathbb{R}^d$, preprint, 2011 (submitted)