飛躍型マルコフ過程と Dirichlet 形式

上村稔大

関西大学システム理工学部

日本数学会 統計数学分科会
2012 年 9 月 18 日

はじめに

飛躍型過程 (jump(-type) process or discontinuous process)

$$\Downarrow$$

Gauss 項を持たない Lévy 過程が典型的.

例：

- Poisson 過程
- 指数 α $(0 < \alpha < 2)$ を持つ 安定過程

- ここでは，適当な Lévy 型の核 $\boldsymbol{n(x,dy)}$ に対して，次の二次 (対称) 形式と 'nonlocal operator' を考える：

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{2}\iint_{x\neq y}\big(u(x)-u(y)\big)\big(v(x)-v(y)\big)n(x,dy)m(dx),$$

$$\mathcal{L}u(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{d(x,y)>1/n}\Big(u(x)-u(y)\Big)n(x,dy).$$

- さらに，これらに (存在するとして) 対応する確率過程に考えていくことにする． どちらも**飛躍型確率過程**を考察する際には典型的に現れるものである．

▷ (対称)Dirichlet 形式について簡単に説明する：

$\mathcal{F}$ を $L^2(E;m)$ の稠密な線型部分空間，その直積 $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ 上で定義された対称な双線形形式 $\mathcal{E}$ が以下の条件を満たすとき，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は **$L^2(E;m)$ 上の (対称) Dirichlet 形式**であるという：

($\mathcal{E}$.1) (非負性) $\mathcal{E}(u,u)\geq 0,\ u\in\mathcal{F}$.

($\mathcal{E}$.2) (完備性) $(\mathcal{F},\mathcal{E}_1)$ は実 Hilbert 空間． ただし，
$\mathcal{E}_1(u,v)=\mathcal{E}(u,v)+(u,v),\ u,v\in\mathcal{F}$.

($\mathcal{E}$.3) (Markov 性) $u\in\mathcal{F}$ ならば， $v:=(0\vee u)\wedge 1\in\mathcal{F}$ であり，かつ $\mathcal{E}(v,v)\leq\mathcal{E}(u,u)$ を満たす．

- Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が**正則 (regular)** であるとは，$C_0(E)$ をコンパクトな台をもつ E 上の連続関数全体とするとき，$\mathcal{F} \cap C_0(E)$ が $C_0(E)$ において一様ノルムに関して稠密であり，かつ $\mathcal{F}$ において，内積 $\mathcal{E}_1$ に関して稠密なときをいう．
- 正則な Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対して，**対称 Hunt 過程** $\mathsf{M} = (X_t, \mathbb{P}_x)$ が存在して，

$$T_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)] \ m\text{-a.e.} \quad f \in L^2(E; m) \cap \mathcal{B}(E)$$

と表示できる (Fukushima(1971)).

Beurling-Deny 分解公式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(E;m)$ 上の正則な (対称) Dirichlet 形式とすると，Beurling-Deny の分解公式と呼ばれる次の公式が知られている：

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{2}\int_E d\mu^c_{\langle u,v\rangle} + \iint_{x\neq y}\big(u(x)-u(y)\big)\big(v(x)-v(y)\big)J(dx,dy) + \int_E u(x)v(x)k(dx), \quad u,v\in\mathcal{F}\cap C(E).$$

- 上の表示の仕方は一意的である．それぞれ，diffusion part, jumpint part, killing part とよばれる．

- 一方 'nonlocal operator' $\mathcal{L}$ に限らず，Banach 空間上の線形作用素に対して，**Hille-Yosida による半群理論**は，それが**強連続な縮小半群**の生成作用素となるための必要十分条件を与えてくれる：

定理 (Hille-Yosida)

Banach 空間 B 上の線形作用素 $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ が可閉で，その閉包 $\bar{A}$ が強連続な縮小半群の生成作用素となるための必要十分条件は次で与えられる：

(a) $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ は B で稠密.

(b) A は消散作用素： $\|\lambda u - Au\| \geq \lambda \|u\|,\ u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

(c) ある $\lambda > 0$ に対して，$\lambda - A$ の値域が B で稠密.

$B = C_\infty(E)$ として考えた場合は，上の定理は次のようになる：

系 (Hille-Yosida-Ray)

$C_\infty(E)$ 上の線形作用素 $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ が可閉で，その閉包 $\bar{A}$ が強連続で，正値な縮小半群の生成作用素となるための必要十分条件は次で与えられる：

(a) $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ は $C_\infty(E)$ で稠密.

(b) A は**最大値原理**を満たす：

$$u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),\ u(x_0) = \sup_{x \in E} u(x) \geq 0 \ \Rightarrow \ \mathcal{A}u(x_0) \leq 0.$$

(c) ある $\lambda > 0$ に対して，$\lambda - A$ の値域が $C_\infty(E)$ で稠密.

- $C_\infty(E)$ 上の強連続で，正値な縮小半群を Feller **半群**と呼ぶ．Feller 半群の生成作用素のことを Feller 作用素 (Feller generator) とよぶことがある．
- Feller 半群が，確率過程の構成に有効働くのは，Riesz の定理により，それが積分表示できることによる：

Theorem

$\{T_t; t \geq 0\}$ を Feller 半群とすると，$[0,\infty) \times E \times E$ 上に sub-probability 核の族 $\{p_t(x,dy)\}$ が一意に存在して，

$$T_t u(x) = \int_E u(y) p_t(x,dy), \quad u \in C_\infty(E),\ t \geq 0,\ x \in E$$

を満たすようにできる．

Theorem(continued)

また，Chapman-Kolmogorov の公式を満たす：

$$p_{t+s}(x,B)=\int_E p_t(y,B)p_s(x,dy),\ B\in\mathcal{B}(E),\ t,s\geq 0,\ x\in E.$$

さらに，$\{p_t(x,E)\}$ は，マルコフ過程 (詳しくは強マルコフ過程）の推移関数として実現できる (see [BG68,EK86]).

- 特に $E=\mathbb{R}^d$ の場合，そのような半群は，Hille-Yosida -Ray の定理により，生成作用素 $(\mathcal{A},\mathcal{D}(\mathcal{A}))$ は $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で最大値原理を満たす閉作用素であることがわかる．さらに，$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を A が core としてもてば，A は次の表示を持つことがわかる：

Theorem(Courrége:[J01])

$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ が $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ 上の線形作用素 $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ の core であり，A がもし $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ において最大値原理を満たせば， 適当な関数 a_{ij}, b_j, c および $\mathbb{R}^d \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上の核 $\nu(x, dy)$ が存在して，任意の $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathcal{A}u(x) \ &= \ \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x) \\ &\quad + \int_{y\neq x}\Big(u(y) - u(x) - \nabla u(x)\cdot(y-x)1_{B(1)}(y-x)\Big)\nu(x,dy),\end{aligned}$$

と表現できる．

▷ ここで考える 'nonlocal operator' $\mathcal{L}$ も，マルコフ過程を考える際には，自然に現れることがわかる．

- **R.F. Bass**(1988) は，次のような ‘integro-differential operator を考え，それに対して，所謂 “**安定型過程 (stable-like process)**” と呼ばれる確率過程を構成することに成功した：

$$\boxed{-(-\Delta)^{\alpha(x)/2}u(x) := \int_{h\neq 0} \Big(u(x+h)-u(x)-\nabla u(x)\cdot h1_{B(1)}(h)\Big)\frac{w(x)dh}{|h|^{d+\alpha(x)}}}$$

ここで，$\alpha:\mathbb{R}^d\to(0,2)$ は可測函数であり，w は $(-\Delta)^{\alpha(x)/2}(e^{i\xi\cdot})(x) = -e^{i\xi x}|\xi|^{\alpha(x)}$ を満たすようにとる．Bass は，例えば α が Lipschitz 連続で，

$$\boldsymbol{0<\alpha_1\le\alpha(x)\le\alpha_2<2,\ x\in\mathbb{R}^d}$$

を満たせば，$(-\Delta)^{\alpha(x)/2}$ に対する martingale 問題の解が一意的に存在することを示した．

飛躍型対称 Dirichlet 形式

- $\boldsymbol{(E,d)}$：局所コンパクトで可分な距離空間
- $\boldsymbol{m}$：E 上の正値 Radon 測度で $\mathrm{supp}[m]=E$
- $\boldsymbol{n(x,dy)}$：$E\times\mathcal{B}(E)$ 上の核とし，

$$\boldsymbol{n(x,dy)m(dx)=n(y,dx)m(dy)}$$

を満たす．このとき，次の二次形式を考える：

$$(\#)\quad \begin{cases} \mathcal{E}(u,v)=\displaystyle\iint_{x\neq y}\big(u(x)-u(y)\big)\big(v(x)-v(y)\big)n(x,dy)m(dx) \\ \mathcal{D}[\mathcal{E}] = \left\{u\in L^2(E;m):\ \mathcal{E}(u,u)<\infty\right\} \end{cases}$$

- 次の命題は，以降の議論を進める上で基本となる：

Proposition(Closability)

$C_0^{\mathrm{lip}}(E) \subset \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ となるための必要十分条件は，

$$\boxed{x \mapsto \int_{x \neq y} (1 \wedge d(x,y)^2) n(x,dy) \in L^1_{\mathrm{loc}}(E;m)}$$

このとき，$(\mathcal{E}, C_0^{\mathrm{lip}}(E))$ は $L^2(E;m)$ 上の Markov 的な可閉形式となる．すなわち，

$$\mathcal{F} = \overline{C_0^{\mathrm{lip}}(E)}^{\sqrt{\mathcal{E}_1(\cdot,\cdot)}}$$

とおくと，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は $L^2(E;m)$ 上の**正則な Dirichlet 形式**となる．但し，$C_0^{\mathrm{lip}}(E)$ は E 上で定義されたコンパクト台を持つ Lipschitz 連続関数全体を表す．また，$\mathcal{E}_1(u,v) = \mathcal{E}(u,v) + (u,v)_{L^2}$.

大域的性質 (保存性・再帰性・過渡性)

ここでは，飛躍型 Dirichlet 形式，あるいはそれに対応する飛躍型 Markov 過程の標本路の性質について，大域的性質と呼ばれる幾つかの性質について見ていくことにする．

- **保存性 (conservativeness)**

  Dirichlet 形式，または対応する Markov 過程 $\mathbf{M} = (X_t, \mathbb{P}_x)$ が**保存的**であるとは，すべての $t \geq 0$ に対して，

  $$T_t 1 = 1 \ m\text{-a.e.} \quad \text{または} \quad \mathbb{P}_x(X_t \in E) = 1 \ m\text{-a.e.}$$

  が成り立つときを言う．これは，言い換えると，ほとんどすべての出発点 x に対して，全ての $t \geq 0$ に対して，殆どすべての標本路が E 内に留まっていることを意味する．

保存性が成立するための (必要十分) 条件は，色々と知られているが，ここでは Dirichlet 形式の枠組みで与える Oshima による次の結果だけを挙げておく:

Theorem (Oshima)

Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$，または対応する Markov 過程 $\mathbb{M} = (X_t, \mathbb{P}_x)$ が保存的であるための必要十分条件は,

$$\exists \left\{\varphi_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \quad \text{s.t.} \quad 0 \le \varphi_n \le 1 \text{ a.e.}, \ \lim_{n\to\infty} \varphi_n = 1 \text{ a.e.}$$

$$\text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(\varphi_n, v) = 0 \quad \text{for} \ \ \forall v \in \mathcal{F} \cap L^1(E; m).$$

- 多様体，あるいはもっと一般の局所コンパクト空間上の (対称) 拡散過程の保存性の研究は，非常に多くの研究者 (*e.g.* Gaffney, Davies, Li-Karp, Gry'goriyan, Ichihara, Davies, Takeda $\cdots$) によってなされた.

90 年代半ばには，強局所 Dirichlet 形式の枠組みにおいて，非常に Sharp な結果が Sturm により得られている．

- 擬微分作用素（あるいは，その表像）を用いた研究も知られている (*e.g.* Hoh-Jacob, Schilling).
- 飛躍型 Dirichlet 形式に対する保存性は，[SchU07], [BBCK09], [CK09] らの研究があるが，これらは保存性と言うよりも，調和関数や，グリーン関数の正則性の導出の過程で保存性を導いていると言う意味で限定的である．

- 一般の飛躍型 Dirichlet 形式の保存性は，最近になりなされるようになってきた.
  特に，**基礎の測度の volume growth の条件**で導出する方向や，拡散係数に相当する **Lévy 測度の '係数' 増大度の条件**によって導出する方向などがある (Shioza-wa は最近，その両方を含めた形で保存性の条件を与える事に成功している).
- ここでは，次の結果だけを述べておく：

保存性

Theorem (Conservativeness; Masamune-U-Wang(2012))

$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を (#) で与えられた飛躍型 Dirichlet 形式とする：

$$\mathcal{E}(u,v)=\iint_{x\neq y}\bigl(u(x)-u(y)\bigr)\bigl(u(x)-u(y)\bigr)n(x,dy)m(dx),\quad u\in\mathcal{F}.$$

また，$\boldsymbol{n(x,dy)m(dx)=n(y,dx)m(dy)}$ 及び

$$\boldsymbol{\sup_{x\in E}\int_{x\neq y}\bigl(1\wedge d(x,y)^2\bigr)n(x,dy)<\infty}$$

を満たすものとする．

Theorem (Conservativeness; continued))

このとき，適当な $x_0 \in E$ に対して，

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\ln m(B(x_0,r))}{r\ln r} < \infty$$

となるならば，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する飛躍型 Markov 過程は**保存的**である．ただし，$B(x_0,r)$ は x_0 を中心とした半径 r の E における開球を表す.

例題（Stable-type forms）

α を $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上で定義された可測関数とし，次の様な二次形式を考える：

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u,v) = \displaystyle\iint_{x\neq y} \big(u(x)-u(y)\big)\big(u(x)-u(y)\big)|x-y|^{-d-\alpha(x,y)}dxdy \\ \mathcal{D}[\mathcal{E}] = \big\{u \in L^2(\mathbb{R}^d) :\ \mathcal{E}(u,u) < \infty\big\} \end{cases}$$

これは，$m(dx) = dx$ 及び

$$n(x,dy) = \frac{1}{2}\big(|x-y|^{-d-\alpha(x,y)} + |x-y|^{-d-\alpha(y,x)}\big)dy$$

とおくことによりこの節の始めに述べた枠組みとなる．

例題（Stable-type forms:continued）

- **対称安定過程** $\alpha(x,y)$ が定数関数 β の場合．$\mathcal{D}[\mathcal{E}] \supset C_0^{\mathrm{lip}}(\mathbb{R}^d)$ となるための必要十分条件は $\boldsymbol{0 < \beta < 2}$.
$\Rightarrow$ 指数 β をもつ (回転不変な) 対称安定過程に対応する Dirichlet 形式.

- **対称安定型過程** $\alpha(x,y)$ が一方の変数，例えば，x だけに依存する場合：$\alpha(x,y) = \tilde{\alpha}(x)$. $\mathcal{D}[\mathcal{E}] \supset C_0^{\mathrm{lip}}(\mathbb{R}^d)$ となるための必要十分条件は，以下の三条件をみたすこと：

  (i) $0 \le \tilde{\alpha}(x) < 2$ a.e,; (ii) $1/\tilde{\alpha},\ 1/(2-\tilde{\alpha}) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$;

  (iii) $\exists K \subset \mathbb{R}^d$ (compact set) s.t. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d \setminus K} |x|^{-d-\tilde{\alpha}(x)} dx < \infty$.

例題（Stable-type forms:continued）

⇒ 対応するマルコフ過程を**対称安定型過程**と呼んだ.
また, $\boldsymbol{0 < \alpha_1 \leq \tilde{\alpha}(x) \leq \alpha_2 < 2}$ ならば, **保存的**であることもわかる.

- **対称 Lévy 過程** $\alpha(x,y)$ が $x-y$ だけに依存する場合：$\alpha(x,y) = \tilde{\alpha}(x-y)$. $\mathcal{D}[\mathcal{E}] \supset C_0^{\mathrm{lip}}(\mathbb{R}^d)$ となるための必要十分条件は

$$\int_{h\neq 0} (1 \wedge |h|^2)|h|^{-d-\tilde{\alpha}(h)} dh < \infty$$

である.

- **再帰性 (recurrence)** ・ **過渡性 (transience)**
  $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(E;m)$ 上の正則な (対称) Dirichlet 形式とする．$\{T_t; t \geq 0\}$ を Dirichlet 形式に対応する強連続な L^2 上のマルコフ半群とすると，$\{T_t; t \geq 0\}$ は自然に L^1 上のマルコフ半群に拡張できる:

$$\boldsymbol{Gf := \int_0^\infty T_t f\,dt, \quad f \in L^1_+(E;m)}$$

  ▷ $\{T_t; t \geq 0\}$ あるいは，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が**再帰的**であるとは，任意の $f \in L^1_+(E;m)$ に対して
  $Gf = 0$ または ∞ m-a.e., すなわち，
  $\boldsymbol{m(\{x \in E : 0 < Gf(x) < \infty\}) = 0}$ のときを言う．

$\triangleright$ $\{T_t; t \geq 0\}$ あるいは，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が**過渡的**であるとは，$m\big(\{x \in E : g(x) = 0\}\big) = 0$ を満たす任意の $g \in L^1_+(E; m)$ に対して，$Gg < \infty$ m-a.e. を満たすときを言う.

再帰性に関しては，次の定理が知られている：

Theorem (Recurrence: [Theorem 1.6.3 in FOT11])

Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$，または対応する Markov 過程 $\mathbb{M} = (X_t, \mathbb{P}_x)$ が再帰的であるための必要十分条件は,

$$\exists\ \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \text{ s.t. } \lim_{n\to\infty} \varphi_n = 1\ m\text{-a.e.},\ \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(\varphi_n, \varphi_n) = 0$$

実は，純飛躍型 Dirichlet 形式に対しては，Beurling-Deny **分解公式** の形から，次の様に言い換えることができる：

Theorem' (Recurrence)

純飛躍型 (対称) Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, または対応する飛躍型 (対称) Markov 過程 $\mathsf{M} = (X_t, \mathbb{P}_x)$ が再帰的であるための必要十分条件は, $\boldsymbol{1 \in \mathcal{F}_e}$ となることであり, また次の条件とも同値である：

$$\exists\ \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \quad \text{s.t.} \quad \begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 1\ m\text{-a.e.}, \\ &\liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}(\varphi_n, \varphi_n) < \infty \end{aligned}$$

これに関連して，再帰性の十分条件については，最近次の結果得た：

再帰性・過渡性

Theorem (Recurrence: Kinoshita-U(2012))

$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を (#) で与えられる飛躍型 Dirichlet 形式とする．次の条件が成り立つとき，対応する (対称) マルコフ過程は再帰的である： ある点 $x_0 \in E$ が存在して，

$$\begin{cases} \displaystyle \liminf_{R\to\infty} \frac{1}{R^2} \iint_{B(x_0,R)\times B(x_0,R)} d(x,y)^2\, n(x,dy)m(dx) < \infty \\ \displaystyle \liminf_{R\to\infty} \int_{B(x_0,R)} n(x, E\setminus B(x_0,2R))m(dx) < \infty \end{cases}$$

ただし，$B(x_0,R)$ は x_0 を中心とする半径 R の開球であった：$B(x_0,R) := \{y \in E : d(x_0,y) < R\}$.

この結果を用いると，対称安定型過程の再帰性を得ることができる：

例 (対称安定型過程の再帰性:[U(2002)]

Lévy 核が，Lévy density $\boldsymbol{n(x,y) = |x-y|^{-1-\alpha(x)}}$ を用いて，

$$\boldsymbol{n_{\mathsf{s}}(x,dy) = \frac{1}{2}\big(n(x,y)+n(y,x)\big)dy}$$

で与えられる 1 次元対称安定型過程は，次のいずれの場合も再帰的である：

(i) $-\infty < a < b < \infty$，$0 < c < 2$ 及び $1 \leq \alpha < 2$ に対して，

$$\alpha(x) = \begin{cases} c, & a < x < b \\ \alpha, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

例 (対称安定型過程の再帰性:continued)

(ii) $0 < c < 2,\ a \geq e$ 及び $\varepsilon \geq 1$ に対して,

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 - \left(\ln|x|\right)^{-\varepsilon} & |x| > a \\ c, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(iii) $0 < c < 2,\ a \geq 1$ 及び $0 < \varepsilon \leq 1$ に対して,

$$\alpha(x) = \begin{cases} 2 - \left(|x|\right)^{-\varepsilon} & |x| > a \\ c, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- **保存性・再帰性**に限って話をしたが，**過渡性**に関しては，Dirichlet **形式の比較定理**を用いることで簡単な場合の結果は得ることができる．

  しかし，それ以外の飛躍型の対称 Dirichlet 形式についてはまだまだ分かっていないことは山ほどある．例えば，熱核の存在 (transition density) など．いわゆる Sobolev 型の不等式や ultracontractivity 等が成立すれば存在するという結果もある．それに基づいて，拡散過程に対して精力的に行われている熱核の (sub-)Gauss 型の評価は行われている．これに関しては，metric measure space 上の jump 過程の熱核の評価を行ったものとして，Chen-Kim-Kumagai(2009) のみを挙げておく．

生成作用素

ここからは，次の形の二次形式 $\mathcal{E}$ と integro-differential operator $\mathcal{L}$ の関係について考える：

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u,v) = \displaystyle\iint_{x\neq y} \big(u(x)-u(y)\big)\big(v(x)-v(y)\big)n(x,y)m(dx)m(dy) \\ \mathcal{L}u(x) = \displaystyle\int_{y\neq x} \big(u(y)-u(x)-\nabla u(x)\cdot(y-x)1_{B(1)}(y-x)\big)n(x,y)m(dy) \end{cases}$$

▷ ただし，$E=\mathbb{R}^d$ とし，m は $\mathbb{R}^d$ 上の正値 Radon 測度で $\mathrm{supp}[m]=\mathbb{R}^d$ を満たし，$n(x,y)$ は $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\{(x,x):x\in\mathbb{R}^d\}$ 上の非負関数である．また，$n(x,y)$ には対称性 $(n(x,y)=n(y,x))$ を仮定しない．

- Bass の安定型過程は，$n(x,y) = |x-y|^{-d-\alpha(x)}$ としたもの
- $\mathcal{E}$ は対称形式であるが，$\mathcal{L}$ は一般には対称作用素とはならない．

Proposition([U09], [Sch-U07])

$1 \le p < \infty$ とする．このとき，

(i) $x \mapsto \int_{y \neq x} (1 \wedge |x-y|^2) n_{\mathsf{s}}(x,y) m(dy) \in L^p_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}^d; m)$

(ii) $0 < r < R$ を満たす任意の実数 r, R に対して，
$x \mapsto \int_{B(r)} 1_{B(1)^c}(x-y) n_{\mathsf{s}}(x,y) m(dy) \in L^p(\mathbb{R}^d \setminus B(R); m)$

ならば，$\boldsymbol{\mathcal{L}(C_0^2(\mathbb{R}^d)) \subset L^p(\mathbb{R}^d; m)}$.

Proposition(continued)

但し，n_{s} は n の対称化関数である：

$$n_{\mathsf{s}}(x,y) = \frac{1}{2}\big(n(x,y)+n(y,x)\big).$$

特に，$\displaystyle \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{y\neq x}(1\wedge|x-y|^2)n_{\mathsf{s}}(x,y)m(dy)<\infty$ ならば，任意の $p\in[1,\infty)$ に対して，(i)(ii) が成り立つ.

- $\displaystyle \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{y\neq x}(1\wedge|x-y|^2)\,n(x,y)\,m(dy)<\infty$ を仮定すると，$\mathcal{L}(C_0^2(\mathbb{R}^d))\subset L^\infty(\mathbb{R}^d;m)$ であるが，$\mathcal{L}u$ の**可積分性**は一般にはでない.

- 以下，(i)(ii) を仮定する．このとき，$\mathcal{L}$ の**平方場作用素 (square field operator または carré du champ)** Γ を次の様に定義する： $u \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$，$x \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\boldsymbol{\Gamma(u,v)(x) := \mathcal{L}(u\cdot v)(x) - \mathcal{L}u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot \mathcal{L}v(x).}$$

すると，以下の定理が成り立つ：

Theorem([U09])

n 及び m は $p=2$ について (i)(ii) を満たすとする．このとき，$u, v \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\Gamma(u,v)(x) = \int_{y\neq x} \big(u(x)-u(y)\big)\big(v(x)-v(y)\big)n(x,y)m(dy).$$

となる．

Theorem(continued)

従って，

$$\mathcal{E}(u,v) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(u,v)(x)m(dx), \quad u,v \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$$

となる．

⇒ $C_0^2(\mathbb{R}^d)$ に対しては，$\mathcal{E}$ は $\mathcal{L}$ の平方場作用素 Γ の (m による) 積分として表現出来る．

⇒ 一方，$(\mathcal{E}, C_0^2(\mathbb{R}^d))$ は $L^2(\mathbb{R}^d; m)$ 上の可閉形式より，閉包 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対して，L^2 上の生成作用素 $(\mathcal{A}, \mathcal{D}[\mathcal{A}])$ が対応する．

▷ では，$\mathcal{A}$ の (具体的) 表示は？ また，$\mathcal{L}$ と $\mathcal{A}$ との関係は？

Proposition([U09,SchU07])

$p=2$ に対して (i)(ii) を仮定する．更に，適当なベクトル値函数 $b \in L^\infty(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d; m)$ が存在して，

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| 2 \int_{\varepsilon < |x-y| < 1} (y-x) n_{\mathsf{s}}(x,y) m(dy) - b(x) \right| = 0$$

とすると，$C_0^2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}[\mathcal{A}]$ であり， 特に $u \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ に対しては，

$$\mathcal{A}u(x) = \int_{y \neq x} (u(y) - u(x) - \nabla u(x) \cdot (y-x) 1_{B(1)}(y-x)) \, \boldsymbol{n_{\mathsf{s}}(x,y)} \, m(dy) + b(x) \cdot \nabla u(x)$$

と言う表示をもつ．

- ここで，$m(dx) = dx$ かつ $n(x,y)$ が例えば，

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{0<|h|<1} |h| \cdot \Big| n_{\mathsf{s}}(x, x+h) - n_{\mathsf{s}}(x, x-h) \Big| dh < \infty$$

を満たせば，定理は

$$b(x) = 2 \int_{0<|h|<1} h \Big(n_{\mathsf{s}}(x, x+h) - n_{\mathsf{s}}(x, x-h) \Big) dh, \ x \in \mathbb{R}^d$$

として成り立つ.

- 次に $\mathcal{L}$ と $\mathcal{A}$ の関係について考えていく.

命題における $b(x)$ の存在を仮定する. $u, v \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\mathcal{L}v(x)m(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \big(\mathcal{L}^* u(x) + \mathcal{D}u(x)\big)v(x)m(dx) + \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{L}(u\cdot v)(x)m(dx)$$

ただし,

$$\mathcal{L}^* u(x) = \int_{y\neq x} \big(u(y) - u(x) - \nabla u(x)\cdot(y-x)1_{B(1)}(y-x)\big)\, \boldsymbol{n(y,x)}\, m(dy)$$

$$\mathcal{D}u(x) = b(x)\cdot\nabla u(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

である.

従って，$u, v \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\boldsymbol{\mathcal{E}(u,v) = -\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{A}u(x)v(x)m(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(u,v)(x)m(dx)}$$

及び

$$\Gamma(u,v)(x) = \mathcal{L}(u \cdot v)(x) - \mathcal{L}u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot \mathcal{L}v(x), \ x \in \mathbb{R}^d$$

に注意すると，

$$\boldsymbol{\mathcal{A}u(x) = \mathcal{L}u(x) + \mathcal{L}^*u(x) + \mathcal{D}u(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.}$$

となる．

Remarks:

(1) $\widehat{\mathcal{L}}$ を $\mathcal{L}$ の L^2 上の (形式的な) 共役作用素とする．もし，“$\widehat{\mathcal{L}}1$” が (L^2 の関数として) 正当化できるとすれば，

$$\boldsymbol{\widehat{\mathcal{L}}u(x) = \mathcal{L}^*u(x) + \mathcal{D}u(x) + \widehat{\mathcal{L}}1(x)}$$

(2) $\mathcal{L}$ が二階の楕円型偏微分作用素の場合，その平方場作用素は，例えば，非発散型作用素

$$\mathcal{L}u(x) = \sum_{ij} a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(x)$$

のとき，
$$\Gamma(u,v)(x) = 2\sum_{ij} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j}$$

となる．これは発散型の形式に対応している：

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\Gamma(u,u)dx = \sum_{ij}\int_{\mathbb{R}^d} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)dx$$

従って，発散型の形式の生成作用素を $\mathcal{A}$ とすると，

$$\mathcal{A}u(x) - \mathcal{L}u(x) = \sum_{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$$

となり，平方場作用素 Γ は，**高階 (二階) の項を取り去る**効果がある．

▷ ところが，飛躍型作用素の場合，

$$\boldsymbol{\mathcal{A}u(x) - \mathcal{L}u(x) = \mathcal{L}^{*}u(x) + \mathcal{D}u(x)}$$

となり，その差において現れる $\mathcal{L}^*$ は本質的に $\mathcal{L}$ の order は変わらない！

下に有界な半 Dirichlet 形式

- $\mathcal{L}$ から直接 Markov 過程の構成を試みる．そこで，再び (E,d) を局所コンパクトな可分距離空間，m をその上の正値 Radon 測度で $\mathrm{supp}[m]=E$ とする．また，$n(x,y)$, $x,y\in E, x\neq y$ を非負可測関数とする．
- ここでの目的は，各 $n\in\mathbb{N}$ 及び適当な関数 u,v に対し，

$$\mathcal{L}_n u(x) = \int_{d(x,y)>1/n} (u(y)-u(y))n(x,y)m(dy),$$

$$\eta^n(u,v) = -(\mathcal{L}_n u, v) = \int_E \mathcal{L}_n u(x)v(x)m(dx)$$

とおき，$n\to\infty$ のときの極限を考えること．

- $\boldsymbol{n_{\mathsf{s}}(x,y)}$, $\boldsymbol{n_{\mathsf{a}}(x,y)}$ をそれぞれ $n(x,y)$ の**対称化関数**, **歪対称化関数**とする：

$$n_{\mathsf{s}}(x,y) = \frac{n(x,y)+n(y,x)}{2}, \; n_{\mathsf{a}}(x,y) = \frac{n(x,y)-n(y,x)}{2}.$$

(C0) $$\boldsymbol{M_s(\bullet) := \int_{y\neq\bullet} (1\wedge d(\bullet,y)^2) n_{\mathsf{s}}(\bullet,y) m(dy) \in L^2_{\mathsf{loc}}(E;m)}$$

を仮定すると,

$$\mathcal{E}(u,u) = \iint_{x\neq y} \big(u(x)-u(y)\big)\big(u(x)-u(y)\big) n(x,y) m(dx) m(dy)$$

に対して, $\boldsymbol{(\mathcal{E}, C_0^{\mathsf{lip}}(E))}$ は $L^2(E;m)$ 上のマルコフ的な可閉形式となる.

$\Rightarrow$ その閉包 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は正則な (対称)Dirichlet 形式となる．
ただし，$\mathcal{F}=\overline{C_0^{\mathrm{lip}}(E)}^{\sqrt{\mathcal{E}_1}}$．
次に Lévy 核 n の歪対称化関数 $\boldsymbol{n_{\mathsf{a}}}$ に対し，次の仮定をおく：

(C1) (i) $$C_1 := \sup_{x\in E}\int_{d(x,y)\geq 1}\left|n_{\mathsf{a}}(x,y)\right|m(dy)<\infty$$

(ii) $\exists\gamma\in(0,1],\ C_3>0$ s.t.

$$C_2 := \sup_{x\in E}\int_{0<d(x,y)\leq 1}\left|n_{\mathsf{a}}(x,y)\right|^{\gamma}m(dy)<\infty,$$

$$\left|n_{\mathsf{a}}(x,y)\right|^{2-\gamma}\leq C_3\,n_{\mathsf{s}}(x,y),\ \ 0<d(x,y)\leq 1.$$

Theorem(Fukushima-U(2012))

(C0)(C1) を仮定する．このとき，次が成り立つ：

(1) $u, v \in C_0^{\mathrm{lip}}(E)$ に対して，極限

$$\eta(u,v) := \lim_{n\to\infty} \eta^n(u,v)$$

が存在し，以下の表示を持つ：

$$\boldsymbol{\eta(u,v) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(u,v) + \iint_{x\neq y}(u(y)-u(x))v(y)n_{\mathsf{a}}(x,y)m(dy)m(dx)}$$

▷ 特に，右辺の第二項は絶対収束する．

Theorem(Fukushima-U(2012):continued)

(2) η は $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ に拡張され，更に，適当な $\beta_0\geq 0$ に対して，

$$\boldsymbol{|\eta(u,v)| \leq 2\sqrt{2}\sqrt{\eta_{\beta_0}(u,u)}\sqrt{\eta_{\beta_0}(v,v)}}$$

及び

$$\boldsymbol{\frac{1}{4}\mathcal{E}_{\beta_0}(u,u) \leq \eta_{\beta_0}(u,u) \leq \frac{2+\sqrt{2}}{2}\mathcal{E}_{\beta_0}(u,u)}$$

が成り立つ． すなわち，$(\eta,\mathcal{F})$ は次の意味で，

$L^2(E;m)$ 上の **下に有界な半 Dirichlet 形式**となる．

- $\mathcal{F}$: $u \in \mathcal{F} \Rightarrow u \wedge 1 \in \mathcal{F}$ を満たす $L^2(E;m)$ の稠密な部分空間
- η : $\mathcal{F}$ 上の (対称とは限らない) 双線形形式
- $\eta_\beta(u,v) := \eta(u,v) + \beta(u,v),\ u,v \in \mathcal{F},\ \beta \geq 0$ とおく

▷ このとき，$(\eta, \mathcal{F})$ が**下に有界な閉形式 (lower bounded closed form)** であるとは，$\exists\ \beta_0 \geq 0$ s.t.

(B.1) (lower boundedness) $\eta_{\beta_0}(u,u) \geq 0,\ u \in \mathcal{F}$

(B.2) (sector condition) $\exists\ K \geq 1$ such that

$$|\eta(u,v)| \leq K\sqrt{\eta_{\beta_0}(u,u)} \cdot \sqrt{\eta_{\beta_0}(v,v)}, \quad u,v \in \mathcal{F}$$

(B.3) (completeness) $\mathcal{F}$ is **complete** w. r. t. the norm $\eta_\alpha^{1/2}(\cdot,\cdot)$ for some, or equivalently, for all $\alpha > \beta_0$.

$\Rightarrow$ $\exists$ (unique) two families of bdd operators $\{G_\alpha\}_{\alpha>\beta_0}$, $\{\widehat{G}_\alpha\}_{\alpha>\beta_0}$ on L^2 (called "resolvents" and "co-resolvent") s.t. $\boldsymbol{G_\alpha(L^2),\ \widehat{G}_\alpha(L^2) \subset \mathcal{F}}$ and for $f \in L^2,\ u \in \mathcal{F}$,

$$\boldsymbol{\eta_\alpha(G_\alpha f, u) = (f, u) = \eta_\alpha(u, \widehat{G}_\alpha f)},$$

and then,

$\exists$ strong cont. semigroups $\{T_t\}_{t>0}$ and $\{\widehat{T}_t\}_{t>0}$ of operators on L^2 such that, for $\forall\ \alpha > \beta_0$,

$$\boldsymbol{G_\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha f} T_t f\, dt,\ \widehat{G}_\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha f} \widehat{T}_t f\, dt.}$$

- Moreover $\exists$ $(\mathcal{L}, \mathcal{D}[\mathcal{L}])$, $(\widehat{\mathcal{L}}, \mathcal{D}[\widehat{\mathcal{L}}])$ on L^2 so that both $\mathcal{D}[\mathcal{L}]$ and $\mathcal{D}[\widehat{\mathcal{L}}]$ are dense in $\mathcal{F}$ w.r.t. η_α for $\alpha > \beta_0$, respectively, $\boldsymbol{\eta(u, v) = -(\mathcal{L}u, v)}$ for $u \in \mathcal{D}[\mathcal{L}]$, $v \in \mathcal{F}$ and $\boldsymbol{(\mathcal{L}u, v) = (u, \widehat{\mathcal{L}}v)}$ for $u \in \mathcal{D}[\mathcal{L}]$, $v \in \mathcal{D}[\widehat{\mathcal{L}}]$.

▷ 半群 $\{T_t; t > 0\}$ が**マルコフ的 (Markovian)** であるとは, 任意の $t > 0$ について,

$$0 \le T_t f \le 1 \quad \text{whenever } f \in L^2(E; m),\ 0 \le f \le 1.$$

- H. Kunita(1969) は, 半群 $\{T_t; t > 0\}$ が **マルコフ的** であることの必要十分条件が

(B.4) $Uu \in \mathcal{F}$ and $\eta(Uu, u - Uu) \ge 0$ for any $u \in \mathcal{F}$,
where $Uu := (0 \vee u) \wedge 1$.

であることを示した.

- **(B.4)** を満たす下に有界な閉形式 $(\eta, \mathcal{F})$ を**下に有界な半 Dirichlet 形式 (lower bounded semi-Dirichlet form** という.

$\Rightarrow$ '半' がついているのは，**共役半群** $\{\widehat{T}_t; t > 0\}$ が一般にはマルコフ的ではないからである.
(しかし，*positivity preserving* ではある)

- 下に有界な半 Dirichlet 形式 $(\eta, \mathcal{F})$ が**正則 (regular)** であるとは，$\mathcal{F} \cap C_0(E)$ が $C_0(E)$ において **uniformly dense** であり，更に $\mathcal{F}$ において η_α-**dense** であるときをいう．但し，$\alpha > \beta_0$.

Remark

- **M. Fukushima**(1971) は，任意の正則な (対称)Dirichlet 形式に対して，対称 Hunt 過程を対応させることに成功した．
- **S. Carrillo-Menendez**(1975) は，Fukushima の結果を拡張し，任意の正則な下に有界な半 Dirichlet 形式に対して Hunt 過程を構成した．
- **Ma-Overbeck-Röckner** (1995) 及び **Fitzsimmons** (2001) は，より一般の**準正則性**の仮定のもと，**特別 Borel 標準過程**との対応関係を**非負値**半 Dirichlet 形式に対して展開している．

ここで我々の設定に戻る： 関数 $n(x,y)$ に対して,

(C0) $$M_s(\bullet) := \int_{y\neq\bullet} \big(1 \wedge d(\bullet,y)^2\big) n_{\mathrm{s}}(\bullet,y)\, m(dy) \in L^2_{\mathrm{loc}}(E;m)$$

(C1) (i) $$C_1 := \sup_{x\in E} \int_{d(x,y)\geq 1} \big|n_{\mathrm{a}}(x,y)\big|\, m(dy) < \infty$$

(ii) $\exists \gamma \in (0,1],\ C_3 > 0$ s.t.

$$C_2 := \sup_{x\in E} \int_{0<d(x,y)\leq 1} \big|n_{\mathrm{a}}(x,y)\big|^{\gamma} m(dy) < \infty,$$

$$\big|n_{\mathrm{a}}(x,y)\big|^{2-\gamma} \leq C_3\, n_{\mathrm{s}}(x,y),\ 0 < d(x,y) \leq 1.$$

を仮定した.

$$\mathcal{L}_n u(x) = \int_{d(x,y)>1/n} (u(y) - u(y))n(x,y)m(dy),$$

$$\eta^n(u,v) = -(\mathcal{L}_n u, v) = \int_E \mathcal{L}_n u(x)v(x)m(dx)$$

は，$u, v \in C_0^{\mathrm{lip}}(E)$ に対して，極限

$$\eta(u,v) := \lim_{n\to\infty} \eta^n(u,v)$$

を持ち，しかも

$$\begin{aligned}\eta(u,v) &= \frac{1}{2}\mathcal{E}(u,v) \\ &\quad + \iint_{x\neq y}(u(y)-u(x))v(y)n_{\mathrm{a}}(x,y)m(dy)m(dx)\end{aligned}$$

となる．

Remark Schilling-Wang(2011) は，(C1) を次の一つの条件に緩和することに成功した：

$$\text{(C1)'}\quad \sup_{x\in E}\int_{x\neq y}\frac{n_{\mathsf{a}}(x,y)^2}{n_{\mathsf{s}}(x,y)}m(dy)<\infty.$$

- 更に，彼らは $(\eta,\mathcal{F})$ の生成作用素を，*Symmetric Principal Value (SPV)* の考えを用いて表示することを行った.

- ところで，$\boldsymbol{n^*(x,y):=n(y,x)}$ とおくと，

$$\boldsymbol{n^*_{\mathsf{s}}(x,y)=n_{\mathsf{s}}(x,y),\quad n^*_{\mathsf{a}}(x,y)=-n_{\mathsf{a}}(x,y)}$$

より，もし $n(x,y)$ が (C1) をみたせば，$n^*(x,y)$ も (C1) を満たす事がわかる．したがって，次の系が成り立つ：

Corollary

測度 m と Lévy 核 $n(x,y)$ が (C0)(C1) をみたせば，m と $n^*(x,y)$ も同様に (C0)(C1) を満たす．従って，$(\eta^*, \mathcal{F}^*)$ もまた正則な下に正則な半 Dirichlet 形式となり，E 上に対応する Hunt 過程 $\mathsf{M}^* = (X_t, \mathbb{P}_x^*)$ が存在する．

- 但し，$(\eta, \mathcal{F})$ に対応する Hunt 過程 M と M* は一般には，*(weak) dual* の関係にはない．
- $n_s = n_s^*$ なので，実は $\mathcal{F} = \mathcal{F}^*$.

対応する Hunt 過程

- ここで，簡単に $(\eta, \mathcal{F})$ に対応する Hunt 過程について その対応関係をついて述べておこう．

Reference (symmetric) Dirichlet form

$L^2(E; m)$ 上の対称 Dirichlet form $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が $(\eta, \mathcal{F})$ の *reference (symmetric) Dirichlet form* であるとは，各 $\alpha > \beta_0$ に対して，ある $c_1, c_2 > 0$ が存在して，

$$\boldsymbol{c_1\,\mathcal{E}_1(u,u) \le \eta_\alpha(u,u) \le c_2\mathcal{E}_1(u,u), \quad u \in \mathcal{F}}$$

となるときを言う．（この仮定は，実際には必要ないが，以下便宜的に仮定する）

- $\mathcal{L}_A := \{u \in \mathcal{F} : u \geq 1\ m\text{-a.e. on } A\} \neq \emptyset$ を満たす開集合 $A \subset E$ 全体を $\mathcal{O}$ とする.

$\Rightarrow$

$$\alpha > \beta_0,\ A \in \mathcal{O},\ \exists_1\, e_A \in \mathcal{L}_A \text{ s.t.}$$
$$\eta_\alpha(e_A, w) \geq \eta_\alpha(e_A, e_A),\ \forall w \in \mathcal{L}_A$$

- $N \subset E$: **η-polar** $\Leftrightarrow$ $\exists A_n \in \mathcal{O}$ s.t. $A_n \supset N$, $\eta_\alpha(e_{A_n}, e_{A_n}) \to 0$ as $n \to \infty$.

- E 上の関数 u が **η-quasi continuous** $\Leftrightarrow$

$$\exists A_n \in \mathcal{O} \text{ s.t. } \eta_\alpha(e_{A_n}, e_{A_n}) \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

- 'refrenece (symmetric) form' $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の**容量**は,

$$\mathrm{Cap}(A) := \inf\{\mathcal{E}_1(u,u) : u \in \mathcal{L}_A\}, \quad A \in \mathcal{O}$$

で定義された．すると,

$$\boldsymbol{c_1 \mathrm{Cap}(A) \le \eta_\alpha(e_A, e_A) \le c_2 \mathrm{Cap}(A), \quad A \in \mathcal{O}}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{N}$: $\boldsymbol{\eta}$-polar $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\mathcal{E}}$-polar (i.e. $\boldsymbol{\mathrm{Cap}(A) = 0}$)

$\boldsymbol{u}$: $\boldsymbol{\eta}$-quasi continuous $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\mathcal{E}}$-quasi continuous

$$\left(\exists\, A_n \in \mathcal{O} \text{ s.t. } \begin{array}{l} \mathrm{Cap}(A_n) \to 0, \quad n \to \infty \\ u\big|_{E \setminus A_n} : \text{continuous}, \ n \in \mathbb{N} \end{array}\right)$$

Theorem(*c.f.* Carrillo-Menendez(1975))

適当な (η)-polar 集合 N と，$E \setminus N_0$ 上の Hunt 過程 $\mathbb{M} = (X_t, \mathbb{P}_x)$ が存在して，任意の $f \in L^2(E;m) \cap \mathcal{B}_b(E)$ 及び $\alpha > 0$ に対して，$R_\alpha f$ は $G_\alpha f$ の準連続修正である．
ここで，$\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ は $\mathbb{M}$ の resolvent であり，$\{G_\alpha\}_{\alpha>0}$ は $(\eta, \mathcal{F})$ に対応する L^2-resolvent である．

- 上のような対応が存在するとき，$\mathbb{M}$ は $(\eta, \mathcal{F})$ に **proparly associated** であるという．
- ところで，双対 $\{\widehat{T}_t\}$ は一般には Markov 半群ではない．

  ここで，双対半群が Markov 的となるための条件を述べておこう：

Corollary

$(\eta, \mathcal{F})$ を $L^2(E;m)$ 上の正則で，下に有界な半 Dirichlet 形式とする．このとき，以下の条件はすべて同値：

(i) 共役半群 $\{\widehat{T}_t : t \geq 0\}$ はマルコフ的である．

(ii) $\eta(u - Uu, Uu) \geq 0$ for any $u \in \mathcal{F}$.

(iii) m は $\mathsf{M} = (X_t, \mathbb{P}_x)$ の超過測度 (excessive measure): $\langle m, P_t \rangle \leq m$ for each $t \geq 0$.

次に，正則な下に有界な半 Dirichlet 形式 $(\eta, \mathcal{F})$ に対応する Hunt 過程 $\mathsf{M} = (X_t, \mathbb{P}_x)$ と，マルチンゲール問題の解とのかかわりについて考える：

- $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$: $(\eta, \mathcal{F})$ の生成作用素とする：

$$\eta(u, v) = -(\mathcal{L}u, v), \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}),\ v \in \mathcal{F}.$$

- 適当な集合 $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}(\mathcal{L})$ が存在して，次を満たす：

(L.1) $\mathcal{D}_0$ は $\mathcal{F} \cap C_0(E)$ の線形部分空間

(L.2) $\mathcal{L} : \mathcal{D}_0 \longrightarrow \mathcal{F} \cap C_b(E)$.

(L.3) $\exists\, \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_0$(可算集合) s.t. $\forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}),\ \exists \{u_n\} \subset \mathcal{D}_1$
s.t. $\sup_n \|u\|_\infty < \infty$, $\sup_n \|\mathcal{L}u_n\| < \infty$,
$u_n(x) \to u(x),\ n \to \infty,\ x \in E$.

さらに，次の条件も考える：

(L.4) $\exists\{u_n\} \subset \mathcal{D}_0$ s.t. $\sup_n \|u\|_\infty < \infty$, $\sup_n \|\mathcal{L}u_n\| < \infty$, $\forall x \in E,\ u_n(x) \to 1,\ \mathcal{L}u_n(x) \to 0,\ n \to \infty$.

Theorem

下に有界な半 Dirichlet 形式 $(\eta, \mathcal{F})$ は (L.1)-(L.3) を満たす生成作用素 $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ を定めるとする．このとき，

(i) N_0 を含む，適当な Borel 集合の極集合 N が存在して，任意の $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ に対して，

$$M_t^{[u]} := u(X_t) - u(X_0) - \int_0^t \mathcal{L}u(X_s)ds, \quad t \geq 0$$

は，任意の $x \in E \setminus N$ について $\mathbb{P}_x$-martingale である．

(ii) さらに (L.4) も満たせば，Hunt 過程 $\mathsf{M}\big|_{E\setminus N}$ は保存的.

例：Stable-like process

$E=\mathbb{R}^d$, $m(dx)=dx$ とし，Bass の 'stable-like generator' を考える：

$$\boxed{-(-\Delta)^{\alpha(x)/2}u(x) := \int_{h\neq 0}\Big(u(x+h)-u(x)-\nabla u(x)\cdot h1_{B(1)}(h)\Big)\frac{w(x)dh}{|h|^{d+\alpha(x)}}}$$

$n(x,y)=w(x)|x-y|^{-d-\alpha(x)}$ とおくと，われわれの枠組みに入る． このとき，次の条件を考える：適当な正定数 α_1, α_2, M, δ が存在して次を満たす：

$$\begin{cases} 0<\alpha_1\leq\alpha(x)\leq\alpha_2<2,\ \alpha_2<1+\dfrac{\alpha_1}{2}, \\ \big|\alpha(x)-\alpha(y)\big|\leq M|x-y|^\delta,\ x\in\mathbb{R}^d,\ 0<\dfrac{1}{2}\big(2\alpha_2-\alpha_1\big)<\delta\leq 1. \end{cases}$$

例：Stable-like process(continued)

すると，$n(x, y)$ に対して，(C.0)(C.1) を満たす．よって，Hunt 過程 $\mathsf{M} = (X_t, \mathbb{P}_x)$ が存在する．
また，$n(x, y)$ は (L,1)-(L.4) が成り立つこともわかる．従って，適当な除外集合 N の外では，$\mathbb{P}_x$ は $(-\Delta)^{\alpha(x)/2}$ に対する martingale 問題の解となる．

また，解の一意性により，Bass の ‘stable-like process’ の法則とは一致する．しかしながら，N の上で一致するかはわからない．従って，すべての出発点において一致するかは現時点では定かではない．

Remark

上の例において，$n^*(x,y)=n(y,x)$ に対しても (C.0)(C.1) を満たす．そこで，$n^*(x,y)$ から作られる半 Dirichlet 形式を $(\eta^*,\mathcal{F})$ とし，対応する生成作用素を $(-\Delta)^{\alpha(x)/2^*}$ とおくと，$u\in C_0^2(\mathbb{R}^d)\subset\mathcal{D}((-\Delta)^{\alpha(x)/2^*})$ に対して，

$$\begin{aligned}-(-\Delta)^{\alpha(x)/2^*}u(x) &:= \int_{h\neq 0}\Big(u(x+h)-u(x)-\nabla u(x)\cdot h1_{B(1)}(h)\Big)\frac{w(x+h)dh}{|h|^{d+\alpha(x+h)}}\\ &\quad+\frac{1}{2}\int_{0<|h|<1}\nabla u(x)\cdot h\Big(\frac{w(x+h)}{|h|^{d+\alpha(x+h)}}-\frac{w(x)}{|h|^{d+\alpha(x)}}\Big)dh\end{aligned}$$

という表示を持つ．

今後の課題

(i) L^p-Liouville 性と再帰性との関わり

Dirichlet 形式の枠組みにおいて，Liouville 性が成り立つとは，

$$\mathcal{E}(u,\psi) \leq 0 \quad \forall\psi \in \mathcal{C},\ \psi \geq 0$$

を満たす関数 u が定数となる条件を探せ，という形で定式化される．

- K.-Th. Sturm は，強局所型の Dirichlet 形式に対して，L^p-Liouville 問題を論じている ([49]).
- Masamune-U[32] において，飛躍型 (対称)Dirichlet 形式についてこの問題を論じた． 同じことが飛躍拡散型 (jump-diffusion process) に対して成立するか？再帰性との関わりは？ （*e.g.* Kaneko(2000), Kajino(2012)）

(ii) Feller 半群の構成 (確率過程を各点で構成できるか？)

これは，飛躍型 Dirichlet 形式というより，(半)Dirichlet 形式の理論そのものの問題，と言った方がよい．
(Dirichlet 形式より) 構成した Hunt 過程の中から性質のよいもの，具体的には*すべての出発点*から出発するマルコフ過程を自然な形で取り出せるか．

この問題に答えるひとつの方法は，L^2-半群が Feller 性を持つことを示すことである．

- ▷ **調和関数の Hölder 連続性**を示し，レゾルベントの一様連続性から Feller 性を導くというやり方もある (*e.g.* Song-Vondracek(2004), Schilling-U[43])

- ▷ 一方，Feller 作用素が与えられたとき，その**有界な摂動**は再び Feller 半群を生成するということは知られている．この事実を用いて，Shiozawa-U[46] では，特別な場合 (実際には，'lower order') の対称安定型過程の Feller 性を示すことができたが，一般の場合はどうか？

(iii) 双対半群のマルコフ性は？

(正則な) 下に有界な半 Dirichlet 形式に対しては，L^2-半群 $\{T_t, t \geq 0\}$ と，その双対半群 $\{\widehat{T}_t, t \geq 0\}$ が自然に定まるが，一般に $\{\widehat{T}_t, t \geq 0\}$ は**マルコフ的でない**.

- ▷ m が推移関数 $p_t(x, dy)$ に対して，超過測度 (excessive measure) とはならない．従って，双対半群に付随した**ポテンシャル論**や**加法汎関数 (additive functional)** の理論が展開できない．

- ところが，最近 Oshima[38] は，co-excessive 関数を用いた ***h*-変換**の理論が半 Dirichlet 形式の枠組みにおいて適用可能であることを見出し，半 Dirichlet 形式に付随した確率解析を展開することに成功している．
- さらに，Beurling-Deny 型の分解公式が成立することも示しており，それにより，我々の考えた (飛躍型) 半 Dirichlet 形式に対する Lévy 系の飛躍測度 $J(dx, dy)$ が

$$J(dx, dy) = m(dx)n(x, y)m(dy)$$

  であることがわかる．従って，$n(x, y)$ が真に，対応するマルコフ過程の jump rate (Lévy density) を表していることがわかる．

(iv) (対称とは限らない) ジャンプ拡散過程の構成と ⋯

Stroock(1975) や Komatsu(1973) は，早くからジャンプを含む拡散過程の構成を試みているが，どちらも飛躍部分が，拡散項の摂動となっているような場合について主に考察している．

- 例えば，拡散項が退化しない場合は，飛躍型の部分はある程度任意性を持っても，ジャンプ拡散過程が構成出来ることは知られている．しかし，ドリフト項がある場合に拡散項が退化すると，扱いが難しくなる．

- 最近，拡散 data と Lévy 核に対して，拡散係数 a_{ij} が退化し，ドリフト係数 b_i が退化しない場合を含む適当な条件の下，下に有界な半 Dirichlet 形式が構成可能であることを [54] において示すことができた．しかしながら，対応する Hunt 過程がどのような大域的性質を持つかについて深くは考察できていない．熱核の評価は？ regularity は？ Gauss 型評価は？

御清聴ありがとうございます