飛躍型 Markov 過程と Dirichlet 形式

上村稔大 (関西大学システム理工学部)*

1. はじめに

本講演では，飛躍型 Markov 過程について筆者が関わってきた研究の範囲について，その一端を紹介したい．はじめに対称 Dirichlet 形式に対応する対称な過程について，その存在および大域的性質等について述べる．その後，最近研究が再び進展してきている半 Dirichlet 形式を用いて飛躍型 Markov 過程の構成を論じる．時間があれば，飛躍拡散型 (Jump-Diffusion)，すなわち飛躍項を含む拡散過程について述べる予定である．

飛躍型 Markov 過程の研究は，P. Lévy や S. Bochner による無限分解可能分布の研究が早くから知られている．Bochner は Fourier 解析が Lévy 過程 (独立増分過程) 研究の中心的道具となることを示し，それによって，Lévy 過程の研究が極めて深く進展し，また広汎に拡がっていった．従って，それに連なる研究や拡張は，非常に多岐にわたっており，その全貌を紹介することは筆者の能力を遙かに超える．ここでは筆者の知る範囲の幾つかの参考文献を挙げるにとどめる．まず一般的性質を解説した著書として [40, 39, 9, 41, 3] や，その他に [48, 26] 等がある．サーベイ論文として Bass による論文 [8] がある．最近の話題も含めて解説したものとしては，例えば国際研究会 “Lévy Processes” の報告集 [5] に掲載されている論文 (Sato, Applebaum, Jacob-Schilling, Maejima 等) の参考文献を参照して頂くと，Lévy 過程研究の現在の動向の一端を知る手がかりを与えてくれる．これらを除くと飛躍型 Markov 過程の研究は，ここ 20 年余りの間に本格的に始まったといってよい．勿論，拡散過程に対して，例えば境界値過程などを考えると，それは明らかに飛躍型過程であるので，飛躍型確率過程の研究そのものは全くなされてこなかったわけではない．

一方，Dirichlet 形式は古典的な Dirichlet 積分の Hilbert 空間論的な公理化として，Beurling と Deny によって 1959 年に導入されたものである ([10])．福島正俊 ([16]) は, 1971 年に正則な Dirichlet 形式に対して，対称 Markov 過程を構成することに成功し，さらにそれらが 1 対 1 の関係にあることを見いだした (see also [17, 20, 12]). 以降，Dirichlet 形式は確率過程，特に Markov 過程研究の主要な道具の一つとなっている．

ここで，(対称な)Dirichlet 形式について簡単に説明しておく: X を局所コンパクトで可分な距離空間とし，m をその上の正値 Radon 測度で，その台は X 全体とする．自乗可積分な実関数の空間 $L^2(X;m)$ の稠密な線型部分空間 $\mathcal{F}$ に対して，その直積集合 $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ 上で定義された対称双線型形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が $L^2(X;m)$ 上の Dirichlet 形式であるとは，以下の条件を満たすときをいう：

($\mathcal{E}$-1) $\mathcal{E}$ は非負値： $\mathcal{E}(u,u)\geq 0,\ \text{for}\ \forall\ u\in\mathcal{F}$.

($\mathcal{E}$-2) $\mathcal{E}$ は閉形式である, すなわち，$\mathcal{F}$ は $\mathcal{E}_1(u,v)=\mathcal{E}(u,v)+(u,v)_m$ を内積とする実 Hilbert 空間である．ここで，$(u,v)_{L^2}$ は m に関する L^2-内積を表す.

本研究は科学研究費助成金 (課題番号：23540172) の助成を受けたものである.
* 〒 564-8680 大阪府吹田市山手町 3-3-35
e-mail: t-uemura@kansai-u.ac.jp

($\mathcal{E}$-3) $\mathcal{E}$ はMarkov性を持つ：$u \in \mathcal{F}$ ならば $v = (0 \vee u) \wedge 1 \in \mathcal{F}$ であり，かつ $\mathcal{E}(v,v) \le \mathcal{E}(u,u)$ となる．

Dirichlet形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対して，非正な自己共役作用素 L が，

$$(\sqrt{-L}u, \sqrt{-L}v)_{L^2} = \mathcal{E}(u,v), \quad u,v \in \mathcal{F} = \mathcal{D}[\sqrt{-L}] \tag{1.1}$$

として定まり，その生成する半群 $\{T_t\}$ は ($\mathcal{E}$-3) から，Markov半群となることがわかる，すなわち $f \in L^2(X;m)$ が $0 \le f \le 1$ m-a.e. をみたせば $0 \le T_t f \le 1$ m-a.e. となる．Dirichlet形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が正則(regular)であるとは，$C_0(X)$ をコンパクトな台をもつ X 上の連続関数全体とするとき，$\mathcal{F} \cap C_0(X)$ は，$C_0(X)$ において一様ノルムに関して稠密であり，更に $\mathcal{F}$ の中で内積 $\mathcal{E}_1$ の作るノルムに関して稠密なときをいう．正則なDirichlet形式には対称Hunt過程 $\mathsf{M} = (X_t, \mathbb{P}_x)$ が存在して，

$$T_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)] \;\; m\text{-a.e.} \quad \text{for } f \in L^2(X;m) \cap \mathcal{B}(X) \tag{1.2}$$

と表示できる．逆に，右連続な道を持つMarkov過程 $(X_t, \mathbb{P}_x)$ が m-対称，すなわち，

$$\int_X \mathbb{E}_x[f(X_t)]g(x)m(dx) = \int_X f(x)\mathbb{E}_x[g(X_t)]m(dx)$$

を満たすとすると，$p_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)]$ は $L^2(X;m)$ 上の自己共役作用素に拡張され，それは強連続なマルコフ半群 $\{T_t : t \ge 0\}$ を構成する．このとき，この生成作用素 L を用いて(1.1)によりDirichlet形式が定義される．対称Markov過程の生成するDirichlet形式という場合はこれを指す．一般に，(同じDirichlet形式に対応した)二つのMarkov過程は次の意味で "同値"である: 適当な除外集合(exceptional set)と呼ばれる測度 0 の集合 N (詳しくは容量 0 の集合)があって，N 以外の全ての x について推移関数が一致する．言い換えると，Dirichlet形式に対応するMarkov過程は除外集合に対する "ambiguity" が存在する．従って，いつその同値類(同値なMarkov過程)の中から "良い" ものを見つけ(られ)るか，という問題が生じる．もちろん，これに答えるための研究というものは数多く存在する．その一つとして，Markov過程の推移半群のFeller性を示すというものがある．これにより，対応するMarkov過程として，その同値な class の中からFeller過程を取り出すことが出来る(see *e.g.* [43])．また，同値関係において出現する除外集合を小さくしていく，という方向の研究もある(see *e.g.* [31, 19, 18])．

$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を正則な(対称)Dirichlet形式とすると，Beurling-Deny公式と呼ばれる次の式が知られている(see [20, Theorem 3.2.1 and Theorem 4.5.2])：

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u,v) &= \frac{1}{2}\int_X d\mu^c_{\langle u,v\rangle} + \iint_{X\times X-d}\big(\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)\big)\big(\tilde{v}(x)-\tilde{v}(y)\big)J(dx,dy) \\ &\qquad + \int_X \tilde{u}(x)\tilde{v}(x)k(dx), \quad u,v \in \mathcal{F}_e.\end{aligned} \tag{1.3}$$

この表示の仕方は一意的である．それぞれ diffusion part, jumping part, killing part とよばれる．ここに $\mathcal{F}_e$ は $(\mathcal{E},\mathcal{F}_e)$ の拡大Dirichlet空間(extended Dirichlet space)であり，$\tilde{u}$ は $u \in \mathcal{F}_e$ の準連続修正を表す．

2. 飛躍型対称 Dirichlet 形式

ここでは，次のような二次形式を考える：

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u,v) &= \displaystyle\iint_{X\times X-\Delta}\bigl(u(x)-u(y)\bigr)\bigl(u(x)-u(y)\bigr)n(x,dy)m(dx) \\ \mathcal{D}[\mathcal{E}] &= \Bigl\{u\in L^2(X;m): \displaystyle\iint_{X\times X-\Delta}\bigl(u(x)-u(y)\bigr)^2 n(x,dy)m(dx)<\infty\Bigr\} \end{cases} \tag{2.1}$$

を考える．ただし，$\Delta := \{(x,x) : x \in X\}$．$n(x,dy)$ は $X\times\mathcal{B}(X)$ 上で定義された核で，次を満たすとする：

$$n(x,dy)m(dx) = n(y,dx)m(dy) \tag{2.2}$$

次の命題は以降の議論を進める上で基本となる：

命題 2.1 (see *e.g.* [20, Example 1.2.4], [51, 52, 43]) $C_0^{\mathsf{lip}}(X)\subset\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ となるための必要十分条件は,

$$x\mapsto\int_{y\neq x}\Bigl(1\wedge d(x,y)^2\Bigr)n(x,dy)\in L^1_{\mathsf{loc}}(X;m) \tag{2.3}$$

となることである．ここで $C_0^{\mathsf{lip}}(X)$ は X 上の Lipschitz 連続関数で台がコンパクトなもの全体を表す.

$$\Psi(x) := \int_{y\neq x}\Bigl(1\wedge d(x,y)^2\Bigr)n(x,dy),\quad x\in X$$

とおいて，以下 $\Psi\in L^1_{\mathsf{loc}}(X;m)$ を仮定する．このとき，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は $L^2(X;m)$ 上の正則な対称 Dirichlet 形式となる．ただし，

$$\mathcal{F} := \overline{C_0^{\mathsf{lip}}(X)}^{\sqrt{\mathcal{E}_1}},\quad \mathcal{E}_1(u,u) := \mathcal{E}(u,u)+\int_X u(x)^2 m(dx),\quad u\in C_0^{\mathsf{lip}}(X).$$

よって，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ には m-対称な Hunt 過程が対応する．しかもその形から Hunt 過程は飛躍型 Markov 過程となることがわかる．$\mathsf{M}=(X_t,\mathbb{P}_x)$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する m-対称な Hunt 過程とし，その推移関数を $\{p_t, t\geq 0\}$ とおく：

$$p_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)],\quad t\geq 0,\ x\in X,\ f\in\mathcal{B}(X).$$

筆者が，飛躍型 Markov 過程の研究を始めるきっかけとなったのは 1990 年代後半に R.F. Bass による安定型過程 (stable-like process) に関する論文 ([6, 7]) に出会ってからである．彼はこれらの論文において次の様な非局所型微分積分作用素を考えた[1]：

$$-\bigl(-\Delta\bigr)^{\alpha(x)/2}u(x) := w(x)\int_{h\neq 0}\Bigl(u(x+h)-u(x)-\nabla u(x)\cdot h1_{B(1)}(h)\Bigr)\frac{dh}{|h|^{d+\alpha(x)}},\quad \text{for } x\in\mathbb{R}^d,\ u\in C_b^2(\mathbb{R}^d). \tag{2.4}$$

[1] 彼が考えたのは 1 次元の場合であるが，ここでは d 次元で考える．

但し，$\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ は区間 $(0,2)$ に値を取る関数であり，w は $\left(-\Delta\right)^{\alpha(x)/2} e^{iux} = -|u|^{\alpha(x)} e^{iux}$ を満たすよう定める．Bass は $\left(-\Delta\right)^{\alpha(x)/2}$ に対して確率過程は存在するか（また，それは一意的か）ということを考え，これを martingale 問題として定式化した．そうして実際に，次の条件の下で解くことに成功している：

(i) $0 < \inf_{x \in \mathbb{R}} \alpha(x) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \alpha(x) < 2,$

(ii) $\beta(z) := \sup_{|x-y| \leq z} \left|\alpha(x) - \alpha(y)\right| = o(1/\ln|z|) \text{ as } z \to 0 \quad \text{and}$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\beta(z)}{z} dz < \infty.$

martingale 問題の解として現れる強マルコフ過程 (Feller 過程となる) を，彼は**安定型過程** (stable-like process) と呼んだ．特に $\alpha(x)$ が定数 β $(0 < \beta < 2)$ のときは，指数 β の (回転不変な) 対称安定過程となる．しかし，α が定数でなければ，安定過程とはならず，平行移動不変な過程，つまり Lévy 過程にもならない．Bass のこの研究は，Lévy 過程とは真に異なる，しかも非自明な飛躍型確率過程の存在を明らかにした．これ以降，たくさんの人が色々な手法（確率微分方程式，擬微分作用素，Dirichlet 形式等) を用いて，安定型過程の一般化及び拡張や，それらの詳しい標本路の性質の解析を行っている (see *e.g.* [50, 35, 24, 27])．

2.1. 大域的性質（保存性・再帰性・過渡性）

この小節では，始めに保存性を考える．Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$，或いは対応する Markov 過程 M$= (X_t, \mathbb{P}_x)$ が**保存的** (conservative) であるとは，$T_t 1 = 1$ m-a.e., $t \geq 0$ が成り立つことを言う．言い替えると，M が保存的であるとは $\mathbb{P}_x(X_t \in X) = 1$, m-a.e., $t \geq 0$ が成り立つこと，すなわち，どんな時刻 $t \geq 0$ に対しても標本路がほとんどすべての出発点に対して状態空間 X にとどまっていることを意味する．

保存性が成り立つためのいろいろな（十分）条件は知られているが，ここでは，Dirichlet 形式の枠組みにおける Oshima の結果を述べておく．

定理 2.1 (Oshima [37]; see also [20]) Dirichlet 形式，あるいは対応する Markov 過程 M が保存的であるための必要十分条件は，次の条件をみたすような関数列 $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{F}$ が存在することである：

$$0 \leq \varphi_n \leq 1 \ m\text{-a.e.}, \ \lim_{n \to \infty} \varphi_n = 1 \ m\text{-a.e. and} \lim_{n \to \infty} \mathcal{E}(\varphi_n, u) = 0, \ \forall u \in \mathcal{F} \cap L^1(X; m).$$

多様体あるいはもっと一般の局所コンパクト空間における (対称) 拡散過程の保存性の研究は非常に多くの研究者によりなされ，'90 年代の半ばには Sturm([49]) により，強局所 Dirichlet 形式の枠組みにおいて非常に sharp な結果が得られている．一方，擬微分作用素を用いた接近もある (see [25, 42])．飛躍型 Markov 過程，あるいは飛躍型 Dirichlet 形式に対しては，Schilling-Uemura([43])，Barlow-Bass-Chen-Kassmann([4]) や Chen-Kumagai([14]) 等の研究があるが，いずれも調和関数の正則性や熱核の評価を行う際に保存性が必要なため，それぞれの設定の下で保存性を導いている．

一般的な枠組みにおいて飛躍型の Markov 過程の保存性を導出する研究はここ数年になり多くなされるようになってきた．特に，基礎の測度の volume growth の条件によ

る導出するという方向や([33, 23])，拡散係数に相当する Lévy 核の係数増大度で条件を与える方向などがある([47])．[2] ここでは次の結果を述べておく．

定理 2.2 ([34]) (2.1) で与えられる Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を考える．Lévy 核 n と基礎の測度 m は (2.2) の対称性を満たすものとする．次を仮定する：

$$\sup_{x \in X} \int_{y \neq x} \bigl(1 \wedge d(x,y)^2\bigr) n(x, dy) < \infty.$$

このとき，適当な点 $x_0 \in X$ に対し

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{\ln m(B(x_0, r))}{r \ln r} < \infty \tag{2.5}$$

ならば，M あるいは $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は保存的である．

例 2.1 α を $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上で定義された可測関数とする．次のような二次形式を考える：

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{E}(u,v) & = & \displaystyle\iint_{x \neq y} \frac{\bigl(u(x)-u(y)\bigr)\bigl(v(x)-v(y)\bigr)}{|x-y|^{d+\alpha(x,y)}} dxdy, \\ \mathcal{D}[\mathcal{E}] & = & \bigl\{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \mathcal{E}(u,u) < \infty\bigr\}. \end{array} \right.$$

これは $n(x,y) = |x-y|^{-d-\alpha(x,y)}$ として，$n_{\mathsf{s}}(s,y) = \bigl(n(x,y) + n(y,x)\bigr)/2$ とおいたとき，(2.1) を $m(dx)$ として Lebesgue 測度 dx を考え，

$$n(x, dy) = n_{\mathsf{s}}(x,y) dy,$$

としたものを考えていることになる．

(1) (対称安定過程) $\alpha(x,y)$ が定数 α の場合． (2.3) が成り立つための必要十分条件は $0 < \alpha < 2$ となることである．これは指数 α の対称安定過程に対応する．

(2) (対称安定型過程) $\alpha(x,y)$ が一方の変数，たとえば x, だけに依存する関数の場合： $\alpha(x,y) = \alpha(x)$. このとき (2.3) が成り立つための必要十分条件は，

   (i) $0 < \alpha(x) < 2 \quad \text{a.e.}$

   (ii) $1/\alpha,\ 1/(2-\alpha) \in L^1_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}^d)$

   (iii) $\exists K$ (compact) $\ \text{s.t.}\ \int_{K^c} |x|^{-d-\alpha(x)} dx < \infty.$

   である．これに対応して定まる確率過程を [51, 52] では**対称安定型過程**と呼んだ．また，

   $$0 < \underline{\alpha} \le \alpha(x) \le \overline{\alpha}, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^d$$

   を満たせば，対称安定型過程は保存的であることが分かる．

[2] 最近，Shiozawa[45] は，'Intrinsic metric' を用いて，基礎の測度の volume growth と係数の Lévy 核の係数の増大度の両方を含めた形で保存性の条件を与えることに成功している．

(3) (対称Lévy過程) $\alpha(x,y)$ が $x-y$ だけに依存する場合：$\alpha(x,y)=\alpha(x-y)$.

$$(2.3)\text{ が成り立つ} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{h\neq 0}\big(1\wedge|h|^2\big)|h|^{-d-\alpha(h)}dh<\infty.$$

(3)' (回転不変な対称 Lévy 過程) $\alpha(x,y)$ が $|x-y|$ だけに依存する場合： $\alpha(x,y)=\alpha(|x-y|)$.

$$(2.3)\text{ が成り立つ} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^\infty\big(1\wedge u^2\big)u^{-1-\alpha(u)}du<\infty.$$

さて $\{T_t:t\geq 0\}$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する L^2-半群とする．このとき，T_t は縮小半群であることから，$S_tf(x):=\int_0^t T_sf(x)ds,\ f\in L^2(X;m)$ はRiemann 和の $L^2(X;m)$ 内での強収束極限として確定する．また，S_t は $L^2(X;m)$ 上の線形作用素であり，有界性: $\|S_tf\|_{L^2}\leq t\|f\|_{L^2},\ f\in L^2(X;m)$ を満たす．そこで，$f\in L^1(X;m)\cap L^2(X;m)$ 及びコンパクト集合の増大列 $K_n\subset X$ で，$K_n\subset K_{n+1}\nearrow X$ を満たすものをとる．T_t の対称性とMarkov性から $\int_{K_n}|T_tf(x)|m(dx)\leq\int_X T_t|f(x)|1_{K_n}(x)m(dx)=\int_X|f(x)|T_t1_{K_n}(x)m(dx)$ $\leq\int_X|f(x)|m(dx)$. $n\to\infty$ として，$\|T_tf\|_{L^1}\leq\|f\|_{L^1},\ f\in L^1\cap L^2$ を得る．同様に $\|S_tf\|_{L^1}\leq t\|f\|_{L^1},\ f\in L^1\cap L^2$ も得られるから，$\{T_t\},\{S_t\}$ はそれぞれ $L^1(X;m)$ 上の線形作用素に一意的に拡張されて，$T_sT_tf=T_{s+t}f,\|T_tf\|_{L^1}\leq\|f\|_{L^1},\|S_tf\|_{L^1}\leq t\|f\|_{L^1}$, $f\in L^1(X;m)$ を満たし，$T_t,\frac{1}{t}S_t$ はともにMarkov的である．このようにDirichlet形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ から決まる L^1 上の線形作用素 S_t は，任意の $f\in L^1_+:=\{f\in L^1(X;m):f\geq 0\}$ に対して，正値性と単調性を満たす：$0\leq S_sf\leq S_tf$ m- a.e., $0<s<t$. よって，$Gf(x)=\lim_{t\to\infty}S_tf(x)$ $(\leq\infty)$ m-a.e., $f\in L^1_+$ によって，X 上に m-a.e. で定義された関数 Gf が零集合を除いて一意的に決まる．そうして次の定義が可能となる．

定義 2.1 (see [21, 20])

(i) 推移関数 $\{p_t:t\geq 0\}$ またはDirichlet形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が**過渡的**(transient)であるとは，$m\{x\in X:g(x)=0\})=0$ となるような任意の $g\in L^1_+$ に対して，Gg がほとんど至るところ有限となるときをいう．

(ii) $\{p_t:t\geq 0\}$ またはDirichlet形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が**再帰的**(recurrent)であるとは，任意の非負値関数 $f\in L^1_+$ に対して，

$$Gf=0 \quad \text{または} \;\; \infty \;\; m\text{-a.e.},$$

すなわち，$m(\{x\in\mathbb{R}^d:0<Gf(x)<\infty\})=0$ となることである．

ところで，指数 α をもつ対称安定過程は，$d=1$ のときは $0<\alpha<1$ のとき過渡的であり，$1\leq\alpha\leq 2$ のときは再帰的である．$d\geq 2$ ならば，$0<\alpha<2$ であれば過渡的であった．この結果とDirichlet形式の比較定理とを組み合わせることにより，安定型過程の過渡性・再帰性の結果を得ることができる．

定理 2.3 (see [51, 52])

(a) (対称安定型過程) 例2.1 (2)の条件を満たす関数 $\alpha:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ に対して，$n(x,y)=|x-y|^{-d-\alpha(x)},\ x,y\in\mathbb{R}^d,\ x\neq y$ となる場合．

(1) $d=1$ とする．このとき，次の二つの条件が満たされるとき，対称安定型過程は再帰的である：

$$\cdot \quad \limsup_{R\to\infty}\int_{B(R)}\Big(\frac{1}{2-\alpha(x)}+\frac{1}{\alpha(x)}\Big)R^{-\alpha(x)}dx<\infty,$$

$$\cdot \quad \limsup_{R\to\infty}\int_{B(2R)}\Big(\int_{\mathbb{R}^d-B(3R)}|x-y|^{-1-\alpha(x)}dx\Big)dy<\infty.$$

(2) 適当な定数 β（ただし，$d\geq 2$ のときは $0<\beta<2$, $d=1$ のときは $0<\beta<1$）が存在して，$\alpha(x)\leq\beta$ a.e. を満たすとき，対称安定型過程は過渡的である．

(b) (回転不変な対称 Lévy 過程) 例 2.1 (3)' の条件を満たす関数 $\tilde{\alpha}:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ に対して，$n(x,y)=|x-y|^{-d-\tilde{\alpha}(|x-y|)}$, $x,y\in\mathbb{R}^d$, $x\neq y$ となる場合．

(1) $$\limsup_{R\to\infty}R^{-2+d}\int_0^R u^{1-\tilde{\alpha}(u)}du<\infty \quad \text{かつ} \quad \limsup_{R\to\infty}R^d\int_R^\infty u^{1-\tilde{\alpha}(u)}du<\infty$$

を満たすとき，回転不変な対称 Lévy 過程は再帰的である．

(2) 適当な定数 $K>0$ と $\tilde{\beta}$（ただし，$d=2$ のときは $0<\tilde{\beta}<2$, $d=1$ のときは $0<\tilde{\beta}<1$）が存在して，$\tilde{\alpha}(u)\leq\tilde{\beta}$, a.e. $u\in[0,K)$ を満たすとき，回転不変な対称 Lévy 過程は過渡的である．$d\geq 3$ のときは，回転不変な対称 Lévy 過程は常に過渡的である．

例 2.2 一次元対称安定型過程の場合について考える： $n(x,y)=|x-y|^{-1-\alpha(x)}$.

このとき，次のいずれの場合も対称安定型過程は再帰的である．

(i) $-\infty<a<b<\infty$, $0<c<2$ 及び $1\leq\alpha<2$ に対して，

$$\alpha(x)=\begin{cases} c, & a<x<b,\\ \alpha, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

(ii) $0<c<2$, $a\geq e$ 及び $\varepsilon\geq 1$ に対して，

$$\alpha(x)=\begin{cases} 1-\big(\log|x|\big)^{-\varepsilon}, & |x|\geq a,\\ c, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

(iii) $0<c<2$, $a\geq 1$ 及び $0<\varepsilon\leq 1$ に対して，

$$\alpha(x)=\begin{cases} 2-|x|^{-\varepsilon}, & |x|\geq a,\\ c, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

この小節では，保存性・再帰性・過渡性に限って話を進めてきたが，対称な Lévy 過程に限ってもまだまだ分かっていないことも多い．たとえば，熱核 (transition density) の存在も一般には分かっていない．いわゆる，Sobolev の不等式や，ultracontractivity 等が成り立てば，存在することは分かっている．それに基づいて，拡散過程などで精力的に成されている熱核の Gauss 型などの評価は行われている．これに関しては，より一般の metric measure space 上での jump 過程の熱核の評価を行ったものとして，Chen-Kim-Kumagai による論文 [13] のみあげておく．

2.2. 生成作用素

対称安定型過程に対応するDirichlet形式:

$$\mathcal{E}^{\alpha}(u,v) := \iint_{x\neq y}\big(u(x)-u(y)(v(x)-v(y)\big)\frac{dxdy}{|x-y|^{d+\alpha(x)}}$$

と，(2.4) で与えられるBassの安定型過程に対応する生成作用素 $\big(-\Delta\big)^{\alpha(x)/2}$ の間にはなんらか関係があるであろうか．これに答えるために，ここでは，より一般の

$$\mathcal{E}(u,u) = \iint_{x\neq y}\big(u(x)-u(y)\big)\big(v(x)-v(y)\big)n(x,y)m(dy)m(dx) \tag{2.6}$$

と

$$\mathcal{L}u(x) = \int_{y\neq x}\Big(u(y)-u(x)-\nabla u(x)\cdot(y-x)1_{B(1)}(y-x)\Big)n(x,y)m(dy) \tag{2.7}$$

を考え，$\mathcal{E}$ と $\mathcal{L}$ の関係について考えていく．但し，m はRadon測度で $\mathrm{supp}[m]=\mathbb{R}^d$ を満たすとし，また $n(x,y)$ は $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\{(x,x):x\in\mathbb{R}^d\}$ 上で定義された核とする．ここでは，対称性の条件 (2.2) は仮定しない． すると (2.7) で与えられる $\mathcal{L}$ は一般に，L^2 上で対称とはならないが，(2.6) で与えられる $\mathcal{E}$ は形から明らかに L^2 上の対称形式となる．

はじめに $\mathcal{L}$ が $L^p(\mathbb{R}^d)$ の作用素として意味を持つための条件を考える：

命題 2.2 (*c.f.* [53, Proposition 1]) $1\le p<\infty$ とし，次を仮定する：

(i) $x\mapsto \displaystyle\int_{y\neq x}\big(1\wedge|x-y|^2\big)n_{\mathsf{s}}(x,y)m(dy)\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;m)$

(ii) $0<r<R$ を満たす任意の $R,r\in\mathbb{R}$ に対して，

$$x\mapsto\int_{B(r)}1_{\{|x-y|\ge 1\}}(y)n_{\mathsf{s}}(x,y)m(dy)\in L^p(B(R)^c;m).$$

このとき，$\mathcal{L}(C_0^2(\mathbb{R}^d))\subset L^p(\mathbb{R}^d;m)$ となる．但し，$n_{\mathsf{s}}(x,y)$ は $n(x,y)$ の対称化関数を表す：

$$n_{\mathsf{s}}(x,y)=\frac{1}{2}\big(n(x,y)+n(y,x)\big),\quad x\neq y.$$

特に，

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{y\neq x}\big(1\wedge|x-y|^2\big)n_{\mathsf{s}}(x,y)m(dy)<\infty \tag{2.8}$$

ならば，(i)(ii) が成り立つことがわかる．

注意 2.1 上の命題において，もし

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{y\neq x}\big(1\wedge|x-y|^2\big)n(x,y)m(dy)<\infty$$

だけを仮定すると，$\mathcal{L}(C_0^2(\mathbb{R}^d))\subset L^\infty(\mathbb{R}^d;m)$ であることはわかるが，$u\in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\mathcal{L}u$ の可積分性は一般には出てこない．

以下，常に (2.8) を仮定する．このとき，$\mathcal{L}$ の**平方場作用素** (square field operator または carré du champ) Γ を次で定義する：

$$\Gamma(u,v)(x) := \mathcal{L}(uv)(x) - \mathcal{L}u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot \mathcal{L}v(x), \quad x\in\mathbb{R}^d,\ u,v\in C_0^2(\mathbb{R}^d).$$

次の定理が成り立つ：

定理 2.4 (2.8) を仮定する．このとき，任意の $u,v\in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\Gamma(u,v)(x) = \int_{y\neq x} \big(u(x)-u(y)\big)\big(v(x)-v(y)\big)n(x,y)m(dy), \quad x\in\mathbb{R}^d$$

が成り立つ．すなわち，(2.6) で与えられる Dirichlet 形式は $C_0^2(\mathbb{R}^d)$ の元に対しては，Γ の m による積分で与えられることがわかる：

$$\mathcal{E}(u,v) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(u,v)(x)m(dx), \tag{2.9}$$

さらには，$(\mathcal{E}, C_0^2(\mathbb{R}^d))$ は $L^2(\mathbb{R}^d;m)$ 上の対称で，Markov 的な可閉形式となる．

ところで，$(\mathcal{E}, C_0^2(\mathbb{R}^d))$ の閉包 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は $L^2(\mathbb{R}^d;m)$ 正則な対称 Dirichlet 形式となるので，生成作用素 $(\mathcal{A},\mathcal{D}[\mathcal{A}])$ が存在するが，これは対称である．従って，$\mathcal{A}$ (の表示が具体的に出来たとして，それ) と $\mathcal{L}$ とはどのような関係を持つのかという問題が生じる． 次の結果は，$\mathcal{A}$ の定義域が $C_0^2(\mathbb{R}^d)$ を含んで，その関数に対して具体的表示を持つというものである．

定理 2.5 (2.8) を満たすとする．さらに適当なベクトル値関数 $b\in L^\infty(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d)$ が存在して，

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\Big|2\int_{\varepsilon<|x-y|<1}(y-x)n_{\mathsf{s}}(x,y)m(dy) - b(x)\Big| = 0 \tag{2.10}$$

を満たすとする．このとき $C_0^2(\mathbb{R}^d)\subset\mathcal{D}[\mathcal{A}]$ であり，さらに $u\in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ および $x\in\mathbb{R}^d$ に対して，

$$\mathcal{A}u(x) = \int_{y\neq x}\Big(u(y)-u(x)-\nabla u(x)\cdot(y-x)1_{B(1)}(y-x)\Big)n_{\mathsf{s}}(x,y)m(dy) + b(x)\cdot\nabla u(x)$$

となる．

注意 2.2 (2.10) は，m が Lebesgue 測度 $m(dx)=dx$ であって，$n(x,y)$ が，たとえば

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{0<|h|<1}|h|\cdot\big|n_{\mathsf{s}}(x,x+h)-n_{\mathsf{s}}(x,x-h)\big|dh<\infty$$

を満たせば成り立つことがわかる．このときは，

$$b(x) = 2\int_{0<|h|<1} h\big(n_{\mathsf{s}}(x,x+h)-n_{\mathsf{s}}(x,x-h)\big)dh, \quad x\in\mathbb{R}^d$$

とおけば定理が成り立つ．

上の定理によって $C_0^2(\mathbb{R}^d)$ に対しては生成作用素 $\mathcal{A}u$ の表示が具体的に得られたが，では，$\mathcal{L}u$ とはどのような関係を持つのであろうか．

定理 2.6 (2.8) 及び (2.10) を仮定する．このとき，任意の $u, v \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\mathcal{L}v(x)m(dx) = \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\mathcal{L}^* u(x) + \mathcal{D}u(x)\Big)v(x)m(dx) + \int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{L}(u\cdot v)(x)m(dx).$$

が成り立つ．但し，

$$\mathcal{L}^* u(x) = \int_{y\neq x}\big(u(y) - u(x) - \nabla u(x)\cdot(y-x)1_{\{|x-y|<1\}}\big)n(y,x)m(dy),$$

$$\mathcal{D}u(x) = b(x)\cdot\nabla u(x), \quad x\in\mathbb{R}^d.$$

従って，$u, v \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\mathcal{E}(u,v) = -\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{A}u(x)v(x)m(dx) = \int_{\mathbb{R}^d}\Gamma(u,v)(x)m(dx),$$

及び

$$\Gamma(u,v)(x) = \mathcal{L}(u\cdot v)(x) - u(x)\cdot\mathcal{L}v(x) - \mathcal{L}u(x)\cdot v(x),\ x\in\mathbb{R}^d$$

に注意すると，

$$\mathcal{A}u(x) = \mathcal{L}u(x) + \mathcal{L}^*u(x) + \mathcal{D}u(x), \quad x\in\mathbb{R}^d$$

となる．

注意 2.3 (i) $\widehat{\mathcal{L}}$ を $\mathcal{L}$ の L^2 上の（形式的な）共役作用素とする．上の定理により，仮に ‘$\widehat{\mathcal{L}}1(x)$’ が（$L^2$ の関数として）意味を持てば，

$$\widehat{\mathcal{L}}u(x) = \mathcal{L}^*u(x) + \mathcal{D}u(x) + \widehat{\mathcal{L}}1(x), \quad x\in\mathbb{R}^d$$

という表示をもつことがわかる．一般には，それは正当化できない．(後半の “半 Dirichlet 形式” の節で，‘$\widehat{\mathcal{L}}1$’ が正当化できる例を与える）

(ii) $\mathcal{L}$ が二階の楕円型偏微分作用素の場合は，その平方場作用素 (carré du champ operator) は, 例えば，非発散型作用素

$$\mathcal{L}u(x) = \sum_{ij} a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$$

を考えると，Γ は，

$$\Gamma(u,v)(x) = 2\sum_{ij} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x), \quad x\in\mathbb{R}^d.$$

となる．これは発散型作用素 $\widetilde{\mathcal{L}}$ に対応したものとなる：

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\Gamma(u,v)(x)dx = -(\widetilde{\mathcal{L}}u, v) = -\sum_{ij}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)(x)v(x)dx.$$

よって，形式的に計算すると

$$\widetilde{\mathcal{L}}u(x) - \mathcal{L}u(x) = \sum_{ij}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$$

となる．このように，平方場作用素は，高階（二階）の項を取り去る効果があることが知られている．しかしながら，(2.7) の飛躍型の作用素 $\mathcal{L}$ の場合は，上の定理によると，$\mathcal{A}$ が $\widetilde{\mathcal{L}}$ の役割を果たすので，具体的に求めてみると

$$\mathcal{A}u(x) - \mathcal{L}u(x) = \mathcal{L}^*u(x) + \mathcal{D}u(x)$$

となり，その差において現れる $\mathcal{L}^*$ は $\mathcal{L}$ と本質的に'higher order' は変わらない．

3. 半 Dirichlet 形式

(X, m) を前節と同じものとする．すなわち，X は局所コンパクトな可分距離空間とし，m はその上の Radon 測度で $\mathrm{supp}[m] = X$ を満たすものとする．このとき，$(\eta, \mathcal{F})$ が $L^2(X;m)$ 上の**下に有界な閉形式** (lower bounded closed form) であるとは，$\mathcal{F}$ は $L^2(X;m)$ の稠密な部分空間であり，η は $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ で定義された (必ずしも対称とは限らない) 双線形形式であって，適当な $\beta_0 \geq 0$ が存在して，次を満たすときをいう．

(B.1) (lower boundedness); for any $u \in \mathcal{F}$, $\eta_{\beta_0}(u,u) \geq 0$.

(B.2) (sector condition); $\exists\, K \geq 0$ s.t.

$$\big|\eta(u,v)\big| \leq K\sqrt{\eta_{\beta_0}(u,u)}\cdot\sqrt{\eta_{\beta_0}(v,v)}, \quad u, v \in \mathcal{F}.$$

(B.3) (completeness); ある（従って，すべての）$\alpha > \beta_0$ に対して，$\eta_\alpha^{1/2}(\cdot,\cdot)$ をノルムとするとき $\mathcal{F}$ は完備である．

$(\eta, \mathcal{F})$ を $L^2(X;m)$ 上の下に有界な閉形式とすると，次を満たす $L^2(X;m)$ 上の強連続半群 $\{T_t, g > 0\}$, $\{\widehat{T}_t, t > 0\}$ が存在する (see *e.g.* [36, 30, 38])：

$$(T_tf, g) = (f, \widehat{T}_tg),\ f, g \in L^2(E;m),\ ||T_t|| \leq e^{\beta_0 t},\ ||\widehat{T}_t|| \leq e^{\beta_0 t},\ t > 0. \tag{3.1}$$

更に，その Laplace 変換である resolvents $\{G_\alpha, \alpha > \beta_0\}, \{\widehat{G}_\alpha, \alpha > \beta_0\}$ は次を満たす．

$$G_\alpha f,\ \widehat{G}_\alpha f \in \mathcal{F}, \quad \eta_\alpha(G_\alpha f, u) = \eta_\alpha(u, \widehat{G}_\alpha f) = (f, u), \quad f \in L^2(E;m),\ u \in \mathcal{F}.$$

また，生成作用素 $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$, $(\widehat{\mathcal{L}}, \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{L}}))$ は

$$\eta(u,v) = -(\mathcal{L}u, v),\ u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}), v \in \mathcal{F}, \quad (\mathcal{L}u, v) = (u, \widehat{\mathcal{L}}v),\ u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}), v \in \widehat{\mathcal{D}}(\mathcal{L})$$

を満たす．半群 $\{T_t; t > 0\}$ は，次を満たすとき Markov 的であると言われる：

$$f \in L^2(E;m),\ 0 \leq f \leq 1 \implies 0 \leq T_tf \leq 1,\ t > 0.$$

國田 寛 [28] は $\{T_t; t > 0\}$ が Markov 的である必要十分条件は

$$Uu \in \mathcal{F} \quad \text{and} \quad \eta(Uu, u - Uu) \geq 0 \quad \text{for any} \quad u \in \mathcal{F}, \tag{3.2}$$

であることを示した．ただし, Uu は u の単位縮小である：$Uu = (0 \vee u) \wedge 1$.

$L^2(X;m)$ 上の下に有界な閉形式 $(\eta, \mathcal{F})$ が (3.2) を満たすとき，**下に有界な半 Dirichlet 形式**であるという．一般に，共役半群 $\{\widehat{T}_t; t > 0\}$ は正値性は成立するが，Markov 性は必ずしも成り立たないため，'半' がつくのである．

下に有界な半 Dirichlet 形式 $(\eta, \mathcal{F})$ は，$\mathcal{F} \cap C_0(E)$ が一様ノルムに関して $C_0(E)$ において稠密であり，かつ $\sqrt{\eta_\alpha(\cdot,\cdot)}$-ノルム対し $\mathcal{F} \cap C_0(E)$ が $\mathcal{F}$ において稠密であるとき，**正則**であるという．但し，$\alpha > \beta_0$.

3.1. 飛躍型の半 Dirichlet 形式の構成

n を $X\times X\setminus\{(x,x):x\in X\}$ 上の非負値可測関数とし， $n_{\mathsf{s}}, n_{\mathsf{a}}$ をそれぞれ n の対称化関数，歪対称化関数を表す：

$$n_{\mathsf{s}}(x,y)=\frac{n(x,y)+n(y,x)}{2},\quad n_{\mathsf{a}}(x,y)=\frac{n(x,y)-n(y,x)}{2},\quad x,y\in X,\ x\neq y.$$

始めに次の条件を考える：

(C.0) $\quad M_s(\bullet):=\displaystyle\int_{y\neq\bullet}\Big(1\wedge d(\bullet,y)^2\Big)n_{\mathsf{s}}(\bullet,y)m(dy)\in L^2_{\mathsf{loc}}(X;m).$

このとき，

$$\begin{cases}\mathcal{E}(u,v) & := & \displaystyle\iint_{x\neq y}\big(u(x)-u(y)\big)\big(v(x)-v(y)\big)n(x,y)m(dx)m(dy)\\ \mathcal{D}[\mathcal{E}] & := & \big\{u\in L^2(X;m):\mathcal{E}(u,u)<\infty\big\}\end{cases}$$

とおくと，$(\mathcal{E},\mathcal{D}[\mathcal{E}])$ は $L^2(X;m)$ 上の対称 Dirichlet 形式となることがわかる．また命題 2.1. から $C_0^{\mathsf{lip}}(X)\subset\mathcal{D}[\mathcal{E}]$. 従って，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は $L^2(X;m)$ 上の正則な対称 Dirichlet 形式となる．但し，$\mathcal{F}:=\overline{C_0^{\mathsf{lip}}(X)}^{\sqrt{\mathcal{E}_1}}$． Lévy 核 n の歪対称化関数 n_{a} に対して次の条件を課す (see [22]):

(C.1) (i) $C_1:=\displaystyle\sup_{x\in X}\int_{d(x,y)\geq 1}\big|n_{\mathsf{a}}(x,y)\big|m(dy)<\infty,$

(ii) $\exists\gamma\in(0,1],\ C_3>0\ \text{ s.t. }\ C_1:=\displaystyle\sup_{x\in X}\int_{0<d(x,y)<1}\big|n_{\mathsf{a}}(x,y)\big|^{\gamma}m(dy)<\infty$ かつ

$$\big|n_{\mathsf{a}}(x,y)\big|^{2-\gamma}\leq C_3\,n_{\mathsf{s}}(x,y),\quad x,y\in X,\ 0<d(x,y)<1.$$

注意 3.1 上の条件は Schilling-Wang [44] により，次の条件 (C.1)' に緩和された．

(C.1)' $\quad C':=\displaystyle\sup_{x\in X}\int_{n_{\mathsf{s}}(x,y)>0}\frac{\big|n_{\mathsf{a}}(x,y)\big|^2}{n_{\mathsf{s}}(x,y)}m(dy)<\infty.$

各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，次のような積分と近似形式 η^n を考える：

$$\mathcal{L}^n u(x):=\int_{d(x,y)>1/n}\big(u(y)-u(x)\big)k(x,y)m(dy),\quad x\in X,\ u\in C_0^{\mathsf{lip}}(X),$$

$$\eta^n(u,v):=-(\mathcal{L}^n u,v)=-\iint_{d(x,y)>1/n}\big(u(y)-u(x)\big)v(x)m(dx),\ u\in C_0^{\mathsf{lip}}(X).$$

次の定理を示すことが出来る．

定理 3.1 (C.0)-(C.1) を仮定する．このとき，次が成り立つ．

(1) 任意の $u, v \in C_0^{\mathsf{lip}}(X)$ に対して,

$$\eta(u,v) := \lim_{n\to\infty} \eta^n(u,v)$$

が存在し，以下の表示を持つ：

$$\eta(u,v) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(u,v) + \iint_{x\neq y} \bigl(u(y)-u(x)\bigr)v(y)n_{\mathsf{a}}(x,y)m(dx)m(dy).$$

右辺の第二項は絶対収束する.

(2) η は $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ 上に拡張され，適当な $\beta_0 \geq 0$ が存在して，$u, v \in C_0^{\mathsf{lip}}(X)$ について

$$\bigl|\eta(u,v)\bigr| \leq 2\sqrt{2}\sqrt{\eta_{\beta_0}(u,u)}\sqrt{\eta_{\beta_0}(v,v)}$$

および

$$\frac{1}{4}\mathcal{E}_{\beta_0}(u,u) \leq \eta_{\beta_0}(u,u) \leq \frac{2+\sqrt{2}}{2}\mathcal{E}_{\beta_0}(u,u)$$

が成り立つ.

すなわち，$(\eta, \mathcal{F})$ は $L^2(X;m)$ 上の正則で下に有界な半 Dirichlet 形式となることがわかる.

次に $k^*(x,y) = k(y,x),\ x,y\in X,\ x\neq y$ とおいて，これを k の‘reversed kernel’ ということにする.

$$k_{\mathsf{s}}^*(x,y) = k_{\mathsf{s}}(x,y), \quad k_{\mathsf{a}}^*(x,y) = -k_{\mathsf{a}}(x,y), \quad x,y\in X,\ x\neq y$$

であるから，k に対して (C.0)-(C.1) が成り立てば，k を k^* に代えて得られる条件も同様に成立する．よって，次の系が得られる：

系 3.1 (C.0)-(C.1) を仮定する．このとき，$(\eta^*, \mathcal{F})$ も同じく $L^2(X;m)$ 上の正則で下に有界な半 Dirichlet 形式となる.

3.2. $(\eta, \mathcal{F})$ に対応する Hunt 過程

対称な正則 Dirichlet 形式が与えられると，それに対応して Hunt 過程が存在する．それは，(1.2) の対応によって与えられる ([16]). Carrillo-Menendez [11] は，福島の結果を拡張して，下に有界な正則半 Dirichlet 形式に対して Hunt 過程が存在することを示した. その後，Ma-Overbeck-Röckner[29] や Fitzsimmons[15] らは，準正則な Dirichlet 形式と特別標準過程 (special standard process) の枠組みで研究をさらに推し進めている.

ここでは，前節で考えた $L^2(X;m)$ 上の正則な半 Dirichlet 形式 $(\eta, \mathcal{F})$ に対して，その結果を簡単に説明しよう．$\mathcal{O}$ を X の開集合全体を表す．今,

$$\mathcal{L}_A = \bigl\{u\in\mathcal{F} : u\ m\text{-a.e.}\ \ \text{on } A\bigr\}$$

とおき，$\mathcal{L}_A \neq \varnothing$ を満たす $A\in\mathcal{O}$ を取る．$\alpha > \beta_0$ に対して，$e_A \in \mathcal{L}_A$ を, $\mathcal{L}_A$ における 0 の η_α に関する射影とする：

$$e_A \in \mathcal{L}_A, \quad \eta_\alpha(e_A, w) \geq \eta_\alpha(e_A, e_A) \quad \text{for any } w\in\mathcal{L}_A.$$

集合 $N\subset X$ が **η-極集合** (η-polar set) であるとは，N を含む減少する適当な開集合列 A_n が存在して，e_{A_n} が η_α に関して 0 に収束するときを言う．また，X 上の関数 u は，適当な減少する開集合列 $\{A_n\}$ が存在して，e_{A_n} が η_α に関して 0 に収束して，かつ各 n について $u\big|_{X\setminus A_n}$ が連続となるとき，η-**準連続** (η-quasi-continuous) であると言われる．

$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対する容量 Cap は通常のように定義される：

$$\mathrm{Cap}(A):=\inf\{\mathcal{E}_1(u,u):\ u\in\mathcal{L}_A\},\quad A\in\mathcal{O}.$$

定理 3.1 (2) により，適当な正定数 c_1,c_2 が存在して，

$$c_1\mathrm{Cap}(A)\le\eta_\alpha(e_A,e_A)\le c_2\mathrm{Cap}(A),\quad A\in\mathcal{O}$$

が成り立つ．従って，$N\subset X$ が η-極集合であるための必要十分条件は $\mathrm{Cap}(A)=0$ であり，また，u が η-準連続であることと u が $\mathcal{E}$-準連続であることとは同値である．よって，各 $u\in\mathcal{F}$ に η-準連続修正 $\tilde{u}$ が存在することが分かる．以下，簡単のため η-極集合，η-準連続等は，それぞれ η を省略して，単に極集合，準連続などと書くことにする．

定理 3.2 適当な極集合 $N_0\subset X$ 及び $X\setminus N_0$ 上の Hunt 過程 $\mathsf{M}=(X_t,\mathbb{P}_x)$ が存在して，次の意味で $(\eta,\mathcal{F})$ に対応する：任意の $f\in L^\infty(X;m)\cap\mathcal{B}(X)$ 及び $\alpha>0$ に対して，$R_\alpha f$ は $G_\alpha f$ の準連続修正である．ここで，R_α は M の resolvent であり， G_α は η に対応する L^2-resolvent である．

次に，半 Dirichlet 形式に対応する Hunt 過程の，martingale 問題の解との関わりについて見ていくことにする． $(\mathcal{L},\mathcal{D}(\mathcal{L}))$ を下に有界で正則な半 Dirichlet 形式 $(\eta,\mathcal{F})$ の生成作用素とする：

$$\eta(u,v)=-(\mathcal{L}u,v),\quad u\in\mathcal{D}(\mathcal{L}),\ v\in\mathcal{F}.$$

このとき，適当な部分集合 $\mathcal{D}_0\subset\mathcal{D}(\mathcal{L})$ が存在して，以下を満たすとする：

(L.1) $\mathcal{D}_0$ は $\mathcal{F}\cap C_0(X)$ の線形部分空間.

(L.2) $\mathcal{L}$ は $\mathcal{D}_0$ を $\mathcal{F}\cap C_b(X)$ に移す線形作用素.

(L.3) 次を満たすような適当な可算集合 $\mathcal{D}_1\subset\mathcal{D}_0$ が存在する：

$$\forall u\in\mathcal{D}(\mathcal{L}),\ \exists\{u_n\}\subset\mathcal{D}_1\ \text{s.t.}\begin{cases}\sup\limits_n\|u_n\|_\infty<\infty,\ \sup\limits_n\|\mathcal{L}u_n\|_\infty<\infty,\\ u_n(x)\to u(x),\ \mathcal{L}u_n(x)\to\mathcal{L}u(x),\ n\to\infty,\ \forall x\in X.\end{cases}$$

さらに，次の条件も考える：

(L.4) 適当な関数列 $\{u_n\}\subset\mathcal{D}_0$ が存在して，

$$\begin{cases}\sup_n\|u_n\|_\infty<\infty,\ \sup_n\|\mathcal{L}u_n\|_\infty<\infty,\\ \forall x\in X,\ u_n(x)\to 1,\ \mathcal{L}u_n(x)\to 0,\ n\to\infty.\end{cases}$$

を満たす.

定理 3.3 半Dirichlet形式 $(\eta,\mathcal{F})$ は(L.1)-(L.3)を満たす生成作用素 $(\mathcal{L},\mathcal{D}(\mathcal{L}))$ を定めるとする．このとき，

(i) N_0 を含む，適当なBorel集合の極集合 N が存在して，任意の $u\in\mathcal{D}(\mathcal{L})$ に対して

$$M_t^{[u]} := u(X_t)-u(X_0)-\int_0^t \mathcal{L}u(X_s)ds, \quad t\geq 0$$

は，任意の $x\in X\setminus N$ について，$\mathbb{P}_x$-martingale である．

(ii) 更に (L.4) をも満たせば，Hunt過程 $\mathsf{M}_{X\setminus N}$ は保存的である．

3.3. 安定型過程 (stable-like process)

ここでは，Bassが考察した安定型過程を，半Dirichlet形式の枠組みで構成することを試みる．すなわち，$\mathcal{L}$ は (2.4) で与えられる微積分作用素 (integro-differential operator) $\big(-\Delta\big)^{\alpha(x)/2}$ とする．このとき，$\alpha(x):\mathbb{R}^d\to(0,2)$ は次を満たすとする： 適当な正定数 $\underline{\alpha},\overline{\alpha},M,\delta$ が存在して，以下を満たす：

$$\begin{cases} 0<\underline{\alpha}\leq\alpha(x)\leq\overline{\alpha}<2, \quad \overline{\alpha}<1+\dfrac{\underline{\alpha}}{2} \\ \\ \big|\alpha(x)-\alpha(y)\big|\leq M|x-y|^{\delta} \ \text{ for } 0<\dfrac{1}{2}\big(2\overline{\alpha}-\underline{\alpha}\big)<\delta\leq 1, \ \ x,y\in\mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.3}$$

命題 3.1 関数 α は (3.3) を満たすとする．このとき，$k(x,y)=w(x)|x-y|^{-d-\alpha(x)}$, $x,y\in\mathbb{R}^d, x\neq y$ に対して (C.0)-(C.1) が成り立つ．また，$k^*(x,y)=w(y)|x-y|^{-d-\alpha(y)}$, $x,y\in\mathbb{R}^d, x\neq y$ に対しても同様に (C.0)-(C.1) が成り立つ．

条件 (3.3) の下で，$\mathcal{L}=\big(-\Delta\big)^{\alpha(x)/2}$ は (L.1)-(L.4) を満たすことが分かる．更に，$C_0^2(\mathbb{R}^d)\subset\mathcal{D}(\mathcal{L})$ となることも分かる．従って，適当な除外集合の外では，$\mathbb{P}_x$ が $\mathcal{L}$ に対する martingale の解となる．また解の一意性により，Bass の安定型過程の法則と一致することが分かる．しかしながら，半Dirichlet形式を通じての確率過程の構成は，初期値に対する多義性が依然として残るため，すべての出発点において一致するかどうかは，現時点では定かではない．

注意 3.2 上の命題において，$k^*(x,y)$ に対応する半Dirichlet形式を $(\eta^*,\mathcal{F})$ とし，また η^* に対応する生成作用素を $(\mathcal{L}^*,\mathcal{D}(\mathcal{L}^*))$ とおく：

$$\eta^*(u,v)=-(\mathcal{L}^*u,v), \quad u\in\mathcal{D}(\mathcal{L}^*),\ v\in\mathcal{F}.$$

このとき，$C_0^2(\mathbb{R}^d)\subset\mathcal{D}(\mathcal{L}^*)$ であり，特に $u\in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ に対しては，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^*u(x) \ &= \ \int_{h\neq 0}\big(u(x+h)-u(x)-\nabla u(x)\cdot h\mathbf{1}_{B(1)}(h)\big)\frac{w(x+h)}{|h|^{d+\alpha(x+h)}}dh \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_{0<|h|<1}\nabla u(x)\cdot h\Big(\frac{w(x+h)}{|h|^{d+\alpha(x+h)}}-\frac{w(x-h)}{|h|^{d+\alpha(x-h)}}\Big)dh, \quad x\in\mathbb{R}^d\end{aligned}$$

と言う表示をもつ．

4. 今後の課題

現在までに筆者が関わってきた問題の幾つかを駆け足で述べてきたが，述べきれなかった問題や，今後考えたい問題について述べておく．

(i) L^p-Liouville 性と再帰性との関わり:

Liouville 性の問題とは，一般にはDirichlet形式の枠組みにおいて，

$$\mathcal{E}(u,\psi) \le 0 \quad \forall \psi \in C_0^\infty \ \ \text{with}\ \psi \ge 0$$

を満たす関数が定数となる条件を探せ，ということで定式化される．強局所型のDirichlet形式に対して，Sturm [49] が L^p-Liouville性の問題を論じている．[32] において，我々は非局所型の (対称)Dirichlet 形式についてこの問題を定式化した．しかしながら，再帰性との関連性までは導出できていない．それが可能か？

(ii) Feller半群を取り出せるか:

これは，飛躍型のDirichlet形式というより，(半)Dirichlet形式の理論そのものの問題と云った方が良い．構成したHunt過程の中からよいもの，具体的には全ての点から出発する確率過程を自然な形で取り出せるか，と言う問題である．このことを遂行するための有効な手段の一つは，L^2-半群のFeller性を示すことであるが，それがいついえるか？

始めに，Feller半群が与えられたとき，その生成作用素に対して有界な摂動を考えると，それが再び Feller半群を生成するということはよく知られている．この結果を用いて，[46] では特別な場合の対称安定型過程のFeller性を示すことができたが，一般の場合は未解決である．

(iii) 双対半群はいつマルコフ性がいえるか:

下に有界な半 Dirichlet 形式に対しては，L^2-半群 $\{T_t, t > 0\}$ と，その双対半群 $\{\widehat{T}_t, t > 0\}$ が自然に定まるが，一般には $\widehat{T}_t$ はMarkov 的ではない．従って，基礎の測度 m が推移関数 $p(t,dx)$ に対して，一般に超過測度(excessive measure)とはならないため，双対半群に付随したポテンシャル論や加法汎関数の理論(addtive functional theory)を展開できない．ところが，最近，大島洋一は自身の Erlangen の講義ノートの拡張版 [38] において, co-excessive関数を用いた h-変換の理論が半Dirichlet形式の枠組みにおいて適用可能であることを発見し，半Dirichlet形式に付随した確率解析を展開することに一部成功している．さらにBeurling-Deny型の分解公式が成立することをも示した．そこでは，定理3.1で与えられる半Dirichlet形式に対応するLévy系の飛躍測度 $J(dx,dy)$ が

$$J(dx,dy) = m(dx)k(x,y)m(dy)$$

となることを示している．従って，$k(x,y)$ が対応する飛躍型Hunt過程の jump rate を実際に表していることがわかる．

一方，安定型過程の半Dirichlet形式の生成作用素は(2.4)で与えられるが，α にもう少し強い滑らかさ（たとえば C^2-級）を仮定すると，双対半群の生成作用素 $\widehat{\mathcal{L}}$ は具体的に次のような表示を持つことがわかる：

$$\widehat{\mathcal{L}}u(x) = \mathcal{L}^*u(x) + K(x)u(x),$$

但し，$\mathcal{L}^*$ は ‘reversed kernel’ $k^*(x,y)=w(y)|x-y|^{-d-\alpha(y)}$ から生成される Markov 半群の生成作用素 (**注意** 3.2) であり，K は

$$K(x) \;=\; -\int_{h\neq 0}\Big(w(x+h)|h|^{\overline{\alpha}-\alpha(x+h)}-w(x)|h|^{\overline{\alpha}-\alpha(x)} \\ -\nabla_x\big(w(x)|h|^{\overline{\alpha}-\alpha(x)}\big)\cdot h\mathbf{1}_{B(1)}(h)\Big)\frac{dh}{|h|^{d+\overline{\alpha}}}$$

で与えられる関数である．更に．それは作り方から， $k^*(x,y)$ から構成される Hunt 過程を適当に ‘killing and/or creation’ した確率過程の生成作用素として再構成可能であることがわかる ([55])．形式的には ‘$K(x)=\widehat{\mathcal{L}}1(x)$’ である．

(iv) <u>ジャンプ拡散過程を含むより一般の Markov 過程の構成とその大域的性質</u>:

[54] において, 拡散 data $\{a_{ij},b_i,c\}$ と Lévy 核 n を用いて，適当な条件の下，特に拡散係数 a_{ij} が退化し，ドリフト係数が退化しない場合を含んだ条件でも，下に有界な半 Dirichlet 形式が構成可能であることを示した．また熱核の存在も議論したが，対応する Hunt 過程がどのような大域的性質（再帰性・過渡性等）をもつかについては深く考察できていない．その他，(劣) ガウス型評価などは？

参考文献

[1] S. Albeverio, Z.-M. Ma and M. Röckner, Regularizaiton of Dirichlet spaces and applications, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **314** Série I (1992), 859-864

[2] S. Albeverio, Z.-M. Ma and M. Röckner, Quasi-regular Dirichlet forms and Markov processes, *J. Funct. Anal.*, **111** (1993), 118-154

[3] D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2009

[4] M.T. Barlow, R.F. Bass, Z.-Q. Chen and M. Kassmann, Non-local Dirichlet forms and symmetric jump processes, *Tran. Amer. Math. Soc.*, **361** (2009), 1963-1999

[5] O.E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch and S.I. Resnick (editors), *Lévy Processes – Theory and Applications*, Birkhäuser, 2001

[6] R.F. Bass, Uniqueness in law for pure jump type Markov processes, *Probab. Theory Related Fields*, **79** (1988), 271–287

[7] R.F. Bass, Occupation time densities for stable-like processes and other pure jump Markov processes, *Stochastic Process. Appl.*, **29** (1988), 65–83.

[8] R. F. Bass, Stochastic differential equations with jumps, *Probability Survey*, **1** (2004), 1-19

[9] J. Bertoin, *Lévy Processes*, Cambridge University Press, 1996

[10] A. Beurling and J. Deny, Dirichlet spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **45** (1959), 208-215

[11] S. Carrillo-Menendez, Processus de Markov associé à une forme de Dirichlet nonsymétrique, *Z. Wahrsch. verw. Geb.*, **33** (1975), 139-154

[12] Z.-Q. Chen and M. Fukushima, *Symmetric Markov Processes, Time Change, and Boundary Theory*, Princeton University Press, 2011

[13] Z.-Q. Chen, P. Kim and T. Kumagai, On heat kernel estimates and parabolic Harnack inequality for jump processes on metric measure spaces, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, **25** (2009), 1067–1086

[14] Z.-Q. Chen and T. Kumagai, Heat kernel estimates for jump processes of mixed types on metric measure spaces, *Probab. Theory Related Fields*, **140** (2008), 277–317

[15] P.J. Fitzsimmons, On the quasi-regular semi-Dirichlet forms, *Potential Analysis*, **15** (2001), 151-185

[16] M. Fukushima, Dirichlet spaces and strong Markov Processes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **165** (1971), 185-224

[17] 福島正俊, ディリクレ形式とマルコフ過程, 紀伊国屋書店, 1975

[18] M. Fukushima,Two topics related to Dirichlet forms: quasi- everywhere convergence and additive functionals, in: DELL'ANTONIO, G. and U. MOSCO (eds.), *Dirichlet Forms*, Springer, Lect. Notes Math. vol. **1563**, 1993, 21–53.

[19] M. Fukushima and H. Kaneko, On (r,p)-capacities for general Markovian semigroups, in: ALBEVERIO, S. (ED.), *Infinite dimensional analysis and stochastic processes*, Pitman, Res. Notes Math. vol. **124**, 1985, 41–47.

[20] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, 2nd rev. and ext. ed., Walter de Gruyter, 2011.

[21] 福島正俊, 竹田雅好, マルコフ過程, 培風館, 2008

[22] M. Fukushima and T. Uemura, Jump-type Hunt processes generated by lower bounded semi-Dirichlet forms, *Annals of Probability*, **40** (2012), 858-889

[23] A. Grigor'yan, X.-P. Huang and J. Masamune, On stochastic completeness of jump processes, to appear in *Math. Z.*

[24] W. Hoh, The martingale problem for a class of pseudo-differential operators, *Math. Ann.*, **300** (1994), 121-147

[25] W. Hoh and N. Jacob, Upper bounds and conservativeness for semigroups associated with a class of Dirichlet forms generated by pseudo-differential operators, *Forum Math.*, **8** (1996), 107-120

[26] N. Jacob, *Pseudo-Differential Operators and Markov Processes*, Vol. 1-3, Imperial College Press, 2001-2005

[27] T. Komatsu, On stable-like processes, in *Probability theory and mathematical statistics (Tokyo, 1995)*, 210–219, World Sci. Publ., 1996.

[28] H. Kunita, Sub-Markov semi-groups in Banach lattices, *1970 Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics (Tokyo, 1969)*, 332–343, Univ. of Tokyo Press

[29] Z.-M. Ma, L. Overbeck and M. Röckner, Markov processes associated with semi-Dirichlet forms, *Osaka J. Math.*, 32 (1994), 97-119

[30] Z.-M. Ma and M. Röckner, *Introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms*, Springer-Verlag, Berlin, 1992

[31] P. Malliavin, Implicit functions in finite corank on the Wiener space, in *Stochastic analysis (Katata/Kyoto, 1982)*, 369–386, North-Holland Math. Library, 32, North-Holland, 1984.

[32] J. Masamune and T.Uemura, L^p-Liouville property for nonlocal operators, *Mathematische Nachrichten*, **284** (2011), 2249-2267

[33] J. Masamune and T. Uemura, Conservation property of symmetric jump processes, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, **47** (2011), 650–662.

[34] J. Masamune, T. Uemura and J. Wang, On the conservativeness and the recurrence of symmetrtic jump-diffusions, preprint (2012)

[35] A. Negoro, Stable-like processes: construction of the transition density and the behavior of sample paths near $t = 0$, *Osaka J. Math.*, **31** (1994), 189-214

[36] Y. Ōshima, Lectures on Dirichlet spaces, Lecture Notes at Erlangen University, 1988

[37] Y. Ōshima, On conservativeness and recurrence criteria for Markov processes, *Potential*

Anal., **1** (1992), 115-131

[38] Y. Ōshima, *Semi-Dirichlet forms and Markov processes*, Book manuscript, in preparation (2012)

[39] G. Samorodnitsky and M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*, Chapman & Hall, 1994

[40] 佐藤健一，加法過程，紀伊国屋書店，1990

[41] K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distribution*, Cambridge University Press, 1999

[42] R.L. Schilling, Conservativeness of semigroups generated by pseudo-differential operators, *Potential Anal.*, **9** (1998) 91-104

[43] R.L. Schilling and T. Uemura, On the Feller property of Dirichlet forms generated by pseudo differential opeartors, *Tohoku Mathematical Journal*, **59** (2007), 401-422

[44] R.L. Schilling and J. Wang, Lower bounded semi-Dirichlet forms associated with Lévy type operators, Preprint (2011)

[45] Y. Shiozawa, Conservation property of symmetric jump-diffusion processes, preprint (2012)

[46] Y. Shiozawa and T. Uemura, Stability of the Feller property for non-local operators under bounded perturbations, *Glasnik Matematicki*, **45** (2010), 155-172

[47] Y. Shiozawa and T. Uemura, Explosion of jump-type symmetric Dirichlet forms on $\mathbb{R}^d$, to appear in *J. Theor. Probab.*

[48] A.V. Skorohod, *Random Processes with Independent Increments*, Kluwer Academic Publishers, 1991

[49] K. T. Sturm, Analysis on local Dirichlet spaces I, Recurrence, conservativeness and L^p-Liouville properties, *J. Reine Angew. Math.*, **456** (1994) 173-196.

[50] M. Tsuchiya, Lévy measure with generalized polar decomposition and the associated SDE with jumps, *Stoch. Stoch. Rep.*, **38** (1992), 95-117

[51] T. Uemura, On some path properties of symmetric stable-like processes for one dimension, *Potential Analysis*, **16** (2002), 79-91

[52] T. Uemura, On symmetric stable-like processes: some path properties and generators, *Journal of Theoretical Probability*, **17** (2004), 541-555

[53] T. Uemura, A remark on non-local operators with variable order, *Osaka Journal of Mathematics*, **46** (2009), 503-514

[54] T. Uemura, On multidimensional diffusion processes with jumps, preprint (2012)

[55] T. Uemura, On dual generators of non-local semi-Dirichlet forms, preprint (2012)