対称マルコフ過程の構成と確率解析

– On a construction of a symmetric Markov process and its stochastic analysis –

上村稔大
関西大学システム理工学部

Contents

Chapter 1

イントロダクション

本予稿は，2020 年度北海道大学理学研究科における集中講義科目『数理解析学特別講義「対称マルコフ過程の構成と確率解析 A・B」』用に作成したものである．ここでは，Markov 過程を構成する手段の一つとしてよく知られている Dirichlet 形式の理論について簡単に紹介することを行う．

Dirichlet 形式は, 古典的な Dirichlet 積分の Hilbert 空間論的な公理化として，Beurling と Deny によって 1959 年に導入されたものである ([BD59])．Dirichlet 形式が，さらに**正則**性の条件を満たせば，Hunt 過程と呼ばれる Markov 過程がある意味一意に存在することを福島正俊は 1971 年に示すことに成功した．逆に対称な Hunt 過程が与えられれば, 対応する Dirichlet 形式を構成することができる ([F71, FOT11])．ここで，Markov 過程が Hunt 過程であるとは，強 Markov 性と準左連続性をもつ Markov 過程の一つのクラスである．ところで，Dirichlet 形式は以下に見るように L^2 理論であるため，Dirichlet 形式を通して構成される Markov 過程は，ある種の除外集合 (詳しくは**容量** 0 の集合) を除いた集合を出発点とする Hunt 過程の法則の一意性という意味でしか構築されない．しかしながら，確率微分方程式や martingale 理論とは異なり，状態空間と呼ばれる，Markov 過程が取る値の空間に特段の制約 (微分構造や滑らかさ等) を必要としないことから，解析的には取り扱いが容易なため Markov 過程の解析のための強力な手段となり得る．

そこで，本講義では，Dirichlet 形式を通して構成される対称拡散過程の**保存性**の条件を導出することを最終目標に，以下の内容について講義を行う：

- Dirichlet 形式の基本的概念と，そのポテンシャル論の紹介.
- Hunt 過程とその基本的性質の導出，および付随する確率論的ポテンシャル論の紹介.
- Dirichlet 形式に対応する Hunt 過程を構成する代わりに，Feller 半群と呼ばれる連続関数の作る Banach 空間上の強連続半群に対応する Hunt 過程（これを Feller 過程と呼ぶ) の構成を行う.
- 対称 Dirichlet 形式に付随した確率解析の展開，特に Dirichlet 空間の元に対応して構成される加法汎関数に対する Fukushima 分解公式，および Lyons-Zheng 分解公式の紹介.
- Lyons-Zheng 分解公式の応用として，対称拡散過程の保存性の条件の導出.

この講義の機会を作っていただいた北海道大学教授 正宗 淳先生には心より感謝申し上げます．また，この原稿を作成するにあたって，[FOT11] や [FT08] の草稿を快く提供いただき，貴重なコメントを頂いた関西大学教授 竹田 雅好先生にも感謝申し上げます．最後に，防衛大学校准教授 土田 兼治先生には原稿を通読いただき，いくつものコメントや誤りを指摘して頂きました．併せて感謝申し上げます．

2020 年 11 月

上村稔大

(関西大学システム理工学部)

Chapter 2

解析的準備: Dirichlet 形式

E を局所コンパクトな可分距離空間とし，m を台が E 全体である $(E, \mathcal{B})$ 上の正値 Radon 測度とする．E_Δ を E の一点コンパクト化を表し，E が既にコンパクトのときには Δ を孤立点として E に付け加える． 任意の $A \subset E$ に対して，$A \cup \{\Delta\}$ の位相は E_Δ の相対位相を考える． また，A 上の関数は常に Δ では 0 として $A \cup \{\Delta\}$ に拡張しておくものとする． この意味で，$C_\infty(E)$ は E_Δ 上の連続関数の空間 $C(E_\Delta)$ の部分空間とみなせる．

2.1 Dirichlet 形式と Markov 半群

$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $L^2(E;m)$ 上の**対称閉形式** (symmetric closed form) とする．すなわち，$\mathcal{F}$ は $L^2(E;m)$ の稠密な線形部分空間で，$u \in \mathcal{F}$ ならば $u \wedge 1 \in \mathcal{F}$ を満たし，$\mathcal{E}$ は次を満たす $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ 上の対称二次形式である：

$(\boldsymbol{\mathcal{E}}\mathbf{.1})$ $\mathcal{E}(u,u) \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{F}.$

$(\boldsymbol{\mathcal{E}}\mathbf{.2})$ $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_1)$ は実 Hilbert 空間である．但し，

$$\mathcal{E}_\alpha(u,v) = \mathcal{E}(u,v) + \alpha(u,v), \quad u, v \in \mathcal{F},\ \alpha > 0$$

であり，$(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$ はそれぞれ $L^2(E;m)$ 上の内積，ノルムを表す.

一般に，$\mathcal{D}[\mathcal{E}] \subset L^2(E;m)$ を稠密な部分空間とし，$\mathcal{D}[\mathcal{E}] \times \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ 上で定義された対称な二次形式 $\mathcal{E}$ に対して，$(\mathcal{E}.1)$ が $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ の元に対して成り立つものとする．このとき，$\mathcal{E}$ が $L^2(E;m)$ 上の**可閉形式** (closable form) であるとは,

$$\begin{array}{l} \{u_n\} \subset \mathcal{D}[\mathcal{E}], \quad \mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0 \ \ (n, m \to \infty), \\ (u_n, u_n) \to 0 \ \ (n \to \infty) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{E}(u_n, u_n) \to 0 \ \ (n \to \infty) \end{array} \tag{2.1}$$

が成り立つときをいう．$(\mathcal{E}^i, \mathcal{D}[\mathcal{E}^i])$, $i = 1, 2$ をともに $(\mathcal{E}.1)$ を満たす $L^2(E;m)$ 上の対称な二次形式とする．$\mathcal{E}^2$ が $\mathcal{E}^1$ の**拡張**であるとは,

$$\mathcal{D}[\mathcal{E}^1] \subset \mathcal{D}[\mathcal{E}^2], \quad \mathcal{E}^1(u,v) = \mathcal{E}^2(u,v),\ u, v \in \mathcal{D}[\mathcal{E}^1]$$

を満たすときをいう． $(\mathcal{E}, \mathcal{D}[\mathcal{E}])$ が閉形式の拡張を持つための必要十分条件は，それが可閉であるときである．

定理 2.1 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $L^2(E;m)$ 上の対称閉形式とする．このとき，$L^2(E;m)$ 上の強連続な半群 $\{T_t; t > 0\}$ が存在して，以下の性質を持つ：

$$(T_t u, v) = (u, T_t v), \quad \|T_t u\| \leq \|u\|, \quad u, v \in L^2(E;m).$$

また，$G_\alpha u = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t u dt$, $u \in L^2(E;m)$ で与えられる $\{T_t; t > 0\}$ に対応する $L^2(E;m)$ 上の強連続な Resolvent $\{G_\alpha; \alpha > 0\}$ は,

$$\mathcal{E}_\alpha(G_\alpha f, v) = (f, v), \quad f \in L^2(E;m),\ v \in \mathcal{F}$$

を満たす.

Proof: $\alpha > 0$ 及び $f \in L^2(E;m)$ 対して，$I(u) := (f,u)$, $v \in \mathcal{F}$ とおくと，$I : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ は Hilbert 空間 $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_\alpha)$ 上の有界線形汎関数となる．実際，線形性は明らかであり，また

$$\big|I(u)\big| = \big|(f,u)\big| \le \|f\| \cdot \|u\| \le \frac{\|f\|}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\mathcal{E}_\alpha(u,u)}, \quad u \in \mathcal{F} \tag{2.2}$$

から有界性も分かる．従って，Riesz の表現定理により適当な $G_\alpha f \in \mathcal{F}$ が一意的に存在して，

$$I(u) = \mathcal{E}_\alpha(G_\alpha f, u), \quad u \in \mathcal{F} \tag{2.3}$$

を満たす．以下，各 $\alpha > 0$ に対して，写像 $G_\alpha : L^2(E;m) \longrightarrow \mathcal{F}$ が強連続な Resolvent であることを示す． 各 $\alpha > 0$ に対して，G_α が対称線形作用素であることは明らか．次に，$f \in L^2(E;m)$, $u \in \mathcal{F}$, $\alpha, \beta > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\alpha\big(G_\alpha f - G_\beta f, u\big) \;&=\; \mathcal{E}_\alpha\big(G_\alpha f, u\big) - \mathcal{E}_\alpha\big(G_\beta f, u\big) \;=\; (f,u) - \mathcal{E}_\beta\big(G_\beta f, u\big) - (\alpha-\beta)\big(G_\beta f, u\big)\\ &=\; (f,u) - (f,u) - (\alpha-\beta)\mathcal{E}_\alpha\big(G_\alpha G_\beta f, u\big) \;=\; \mathcal{E}_\alpha\big(-(\alpha-\beta)G_\alpha G_\beta f, u\big)\end{aligned}$$

より，Resolvent 方程式

$$G_\alpha u - G_\beta u + (\alpha-\beta)G_\alpha G_\beta f = 0 \tag{2.4}$$

が成立する．上の評価で α と β を入れ替えることにより，$f \in L^2(E;m)$ に対して $G_\alpha G_\beta f = G_\beta G_\alpha f$ が成立することもわかる．(2.2) および (2.3) より

$$\alpha \mathcal{E}_\alpha(G_\alpha f, G_\alpha f) \le \|f\|^2 \tag{2.5}$$

となる．また，不等式 $\alpha(u,u) \le \mathcal{E}_\alpha(u,u)$, $u \in \mathcal{F}$ から，

$$\|\alpha G_\alpha f\| \le \|f\|, \quad f \in L^2(E;m). \tag{2.6}$$

も得られる．更に，各 $u \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\begin{aligned}\|\alpha G_\alpha u - u\|^2 \;&\le\; \frac{1}{\alpha}\mathcal{E}_\alpha(\alpha G_\alpha u - u, \alpha G_\alpha u - u) \;=\; \alpha\mathcal{E}_\alpha(G_\alpha u, G_\alpha u) - 2\mathcal{E}_\alpha(G_\alpha u, u) + \frac{1}{\alpha}\mathcal{E}_\alpha(u,u)\\ &\le \|u\|^2 - 2\|u\|^2 + \frac{1}{\alpha}\mathcal{E}(u,u) + \|u\|^2 = \frac{1}{\alpha}\mathcal{E}(u,u) \to 0 \quad (\alpha \to \infty)\end{aligned}$$

が成り立つ．$f \in L^2(E;m)$ に対しては，$\mathcal{F}$ が $L^2(E;m)$ において稠密であることから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\|f - u\| < \varepsilon/2$ を満たす $u \in \mathcal{F}$ が存在する． よって，(2.6) により，

$$\|\alpha G_\alpha f - f\| \le \|\alpha G_\alpha f - \alpha G_\alpha u\| + \|\alpha G_\alpha u - u\| + \|u - f\| \le 2\varepsilon + \|\alpha G_\alpha u - u\| \;\to 2\varepsilon \quad (\alpha \to \infty)$$

となる．よって，$\varepsilon \to 0$ とすることにより，G_α の ($L^2(E;m)$ における) 強連続性：

$$\|\alpha G_\alpha f - f\| \to 0 \quad \text{as } \alpha \to \infty, \quad \forall f \in L^2(E;m)$$

が成り立つことが示された． 従って，Hille-Yosida の定理により $\{G_\alpha, \alpha > 0\}$ に対応する**生成作用素** (infinitesimal generator) $(A, \mathcal{D}(A))$ 及び定理の主張を満たす強連続半群 $\{T_t; t > 0\}$ で，それぞれに対応する Resolvent が与えられた $\{G_\alpha, \alpha > 0\}$ となるものが存在する：

$$(\alpha - A)G_\alpha f = f, \quad G_\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t f dt, \quad \alpha > 0, \;\; f \in L^2(E;m), \tag{2.7}$$

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{u \in L^2(E;m) :\; \exists \lim_{t \downarrow 0} \frac{u - T_t u}{t} \;\text{ strongly in } L^2(E;m)\Big\}, \quad Au(x) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{u - T_t u}{t}, \quad u \in \mathcal{D}(A). \tag{2.8}$$

ここで，$\mathcal{D}(A) = G_\alpha\big(L^2(E;m)\big)$ であり，(2.7) の一つ目の等式の左辺は $\alpha > 0$ に無関係であることに注意しておく．実際，(2.4) により，$u = G_\alpha f$, $f \in L^2(E;m)$ に対して，$g = f - (\alpha-\beta)u \in L^2(E;m)$ とおくと，

$$u = G_\alpha f = G_\beta\big(f - (\alpha-\beta)G_\alpha f\big) = G_\beta\big(f - (\alpha-\beta)u\big) = G_\beta g$$

より $u \in G_\beta(L^2(E;m))$ となることがわかる．$\alpha, \beta > 0$ の役割を入れ替えると $G_\alpha\big(L^2(E;m)\big) = G_\beta\big(L^2(E;m)\big)$．次に，各 $\alpha > 0$ に対して $G_\alpha : L^2(E;m) \to \mathcal{F}$ は可逆であることを示そう．そのためには，$G_\alpha f = 0$ ならば $f = 0$ であることを示せばよい．そこで $G_\alpha f = 0$ を仮定する．Resolvent 方程式により，任意の $\beta > 0$ に対して

$$0 = \beta\Big(G_\beta f - G_\alpha f + (\beta - \alpha) G_\beta G_\alpha f\Big) = \beta G_\beta f$$

となる．よって，G_α の強連続性によって，

$$0 = \beta G_\beta f \to f \quad \text{as } \beta \to \infty$$

となるから，$f = 0$. ゆえに，G_α は可逆であることが分かった．

各 $u \in \mathcal{D}(A), \alpha, \beta > 0$ に対して，$u = G_\alpha f,\ f \in L^2(E;m)$ とおくと，$f = G_\alpha^{-1} u$ より，

$$G_\alpha f - G_\beta f + (\alpha - \beta) G_\alpha G_\beta f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u - \beta G_\beta u = G_\beta\big(G_\alpha^{-1} u - \alpha u\big)$$

となる．両辺に G_β^{-1} を作用させると，

$$G_\beta^{-1} u - \beta u = G_\alpha^{-1} u - \alpha u \quad \Longleftrightarrow \quad Au := \alpha u - G_\alpha^{-1} u = \beta u - G_\beta^{-1} u$$

となり，生成作用素 $Au,\ u \in \mathcal{D}(A) = G_\alpha(L^2(E;m))\ \big(\subset \mathcal{F}\big)$ および $G_\alpha(L^2(E;m))$ が $\alpha > 0$ に依存せずに定まることがわかる．

とくに，$u \in \mathcal{D}(A),\ v \in \mathcal{F}$ に対して，$u = G_\alpha f$ を満たす $f \in L^2(E;m)$ が存在することに注意すると，

$$\mathcal{E}(u,v) = \mathcal{E}_\alpha(G_\alpha f, v) - \alpha(G_\alpha f, v) = (f - \alpha G_\alpha f, v) = (G_\alpha^{-1} u - \alpha u, v) = -(Au, v)$$

が成り立つ． □

補題 2.1 各 $\alpha > 0$ に対して，

$$\mathcal{E}^{(\beta)}(f,g) := \beta(f - \beta G_\beta f, g), \quad f, g \in L^2(E;m) \tag{2.9}$$

とおき，$\mathcal{E}^{(\beta)}$ を $\mathcal{E}$ の**近似形式**と呼ぶ．近似形式については，以下の性質が成立する：

(i) $0 < \alpha \le \beta \quad \Longrightarrow \quad 0 \le \mathcal{E}^{(\alpha)}(f,f) \le \mathcal{E}^{(\beta)}(f,f), \quad f \in L^2(E;m)$;

(ii) $\mathcal{E}^{(\beta)}(f, \beta G_\beta f) \le \mathcal{E}^{(\beta)}(f,f), \quad f \in L^2(E;m),\ \beta > 0$;

(iii) $\mathcal{E}(\beta G_\beta f, \beta G_\beta f) \le \mathcal{E}^{(\beta)}(f,f), \quad f \in L^2(E;m),\ \beta > 0$;

(iv) $\mathcal{E}^{(\beta)}(f,v) = \mathcal{E}(\beta G_\beta f, v), \quad f \in L^2(E;m),\ v \in \mathcal{F},\ \beta > 0$.

Proof: (i): $f \in L^2(E;m)$ に対して，Schwarz の不等式と (2.6) より，

$$\mathcal{E}^{(\beta)}(f,f) = \beta\big\{(f,f) - \beta(G_\beta f, f)\big\} \ge \beta\big\{\|f\|^2 - \|\beta G_\beta f\| \cdot \|f\|\big\} \ge \beta(\|f\|^2 - \|f\|^2) = 0.$$

次に，$F(\beta) := \mathcal{E}^{(\beta)}(f,f),\ \beta > 0$ とおく．このとき，任意の $\lambda, \mu > 0, \lambda \ne \mu$ に対して，

$$\begin{aligned}
\frac{F(\lambda) - F(\mu)}{\lambda - \mu} &= \frac{\lambda(f - \lambda G_\lambda f, f) - \mu(f - \mu G_\mu f, f)}{\lambda - \mu} \\
&= (f,f) - \frac{1}{\lambda - \mu}\Big\{(\lambda^2 - \mu^2)(G_\lambda f, f) + \mu^2(G_\lambda f - G_\mu f, f)\Big\} \\
&= (f,f) - (\lambda + \mu)(G_\lambda f, f) + \frac{\mu^2}{\lambda - \mu}\big((\lambda - \mu) G_\lambda G_\mu f, f\big) \\
&= (f,f) - (\lambda + \mu)(G_\lambda f, f) + \mu^2(G_\mu f, G_\lambda f) \\
&\to (f,f) - 2(\mu G_\mu f, f) + (\mu G_\mu f, \mu G_\mu f) \quad \text{as } \lambda \to \mu
\end{aligned}$$

$$= \ (f-\mu G_\mu f, f-\mu G_\mu f).$$

すなわち，$F'(\mu)=\|f-\mu G_\mu f\|^2 \geq 0,\ \mu>0$ となる．よって，$\beta \mapsto F(\beta)$ は単調非減少となるから (i) が成立する．
(ii): 各 $\beta>0,\ f \in L^2(E;m)$ に対して，

$$\mathcal{E}^{(\beta)}(f,\beta G_\beta f)=\beta(f-\beta G_\beta f,\beta G_\beta f)=\beta(f-\beta G_\beta f,f)-\beta(f-\beta G_\beta f,f-\beta G_\beta f)\leq \mathcal{E}^{(\beta)}(f,f).$$

(iii): 各 $\beta>0,\ f\in L^2(E;m)$ に対して， Resolvent の特徴付けと (ii) より

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\beta G_\beta f,\beta G_\beta f)&=\mathcal{E}_\beta(\beta G_\beta f,\beta G_\beta f)-\beta(\beta G_\beta f,\beta G_\beta f)=\beta(f,\beta G_\beta f)-\beta(\beta G_\beta f,\beta G_\beta f)\\&=\mathcal{E}^{(\beta)}(f,\beta G_\beta f)\leq \mathcal{E}^{(\beta)}(f,f).\end{aligned}$$

(iv): 各 $f\in L^2(E;m),\ v\in\mathcal{F}$ に対して，

$$\mathcal{E}^{(\beta)}(f,v)=\beta(f,v)-\beta(\beta G_\beta f,v)=\mathcal{E}_\beta(\beta G_\beta f,v)-\beta(\beta G_\beta f,v)=\mathcal{E}(\beta G_\beta f,v).$$

□

補題 2.2 $u\in L^2(E;m)$ とする．このとき，

$$u\in\mathcal{F} \quad\Longleftrightarrow\quad \sup_{\beta>0}\mathcal{E}^{(\beta)}(u,u)<\infty$$

が成り立つ．

Proof: $u\in\mathcal{F}$ とする．このとき，補題 2.1(i), (iv) 及び (iii) により，

$$0\leq\mathcal{E}^{(\beta)}(u,u)=\mathcal{E}(\beta G_\beta u,u)\leq\sqrt{\mathcal{E}(\beta G_\beta u,\beta G_\beta u)}\sqrt{\mathcal{E}(u,u)}\leq\sqrt{\mathcal{E}^{(\beta)}(u,u)}\sqrt{\mathcal{E}(u,u)}$$

が成り立つことから，

$$\mathcal{E}^{(\beta)}(u,u)\leq\mathcal{E}(u,u),\quad \beta>0$$

となる．よって，$\sup_{\beta>0}\mathcal{E}^{(\beta)}(u,u)<\infty$ が成り立つ．

逆に，$u\in L^2(E;m)$ に対して，$\sup\limits_{\beta>0}\mathcal{E}^{(\beta)}(u,u)<\infty$ を仮定する．このとき，再び補題 2.1(iii) により，任意の $\alpha>0$ に対して，

$$\mathcal{E}_\alpha(\beta G_\beta u,\beta G_\beta u)\leq\mathcal{E}^{(\beta)}(u,u)+\alpha(\beta G_\beta u,\beta G_\beta u)\leq\mathcal{E}^{(\beta)}(u,u)+\alpha\|u\|^2$$

より，

$$\sup_{\beta>0}\mathcal{E}_\alpha(\beta G_\beta u,\beta G_\beta u)\leq\sup_{\beta>0}\mathcal{E}^{(\beta)}(u,u)+\alpha\|u\|^2<\infty$$

となり，$\{\beta G_\beta u\}_{\beta>0}\subset\mathcal{F}$ は Hilbert 空間 $(\mathcal{F},\mathcal{E}_\alpha)$ において一様有界である．よって，Banach-Alaoglu の定理及び Banach-Saks の定理により，$\beta_n\nearrow\infty\ (n\to\infty)$ を満たす適当な部分列 $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty\subset\{\beta>0\}$ が存在して，$\{\beta_n G_{\beta_n}u\}_{n=1}^\infty$ の Cesàro 平均が $(\mathcal{F},\mathcal{E}_\alpha)$ で強収束する．従って，$L^2(E;m)$ においても強収束する．一方，$\|\beta G_\beta u-u\|\to 0\ (\beta\to\infty)$ が成り立つことから，極限の一意性により $\{\beta_n G_{\beta_n}u\}_{n=1}^\infty$ の Cesàro 平均の強収束先も u であることがわかる．ゆえに $u\in\mathcal{F}$ となる．

□

次に，実 Hilbert 空間 $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上に強連続で縮小的な Resolvent $\{G_\alpha\}_{\alpha>0}$ が与えられているものとする：

$(G_\alpha.1)$ $\mathcal{D}(G_\alpha)=H,\quad \alpha>0;$

$(G_\alpha.2)$ $\langle G_\alpha u,v\rangle=\langle u,G_\alpha v\rangle,\quad \alpha>0,u,v\in H;$

$(G_\alpha.3)$ $G_\alpha u-G_\beta u+(\alpha-\beta)G_\alpha G_\beta u=0,\quad \alpha,\beta>0,\ u\in H;$

$(G_\alpha.4)$ $\|\alpha G_\alpha u\| \le \|u\|, \quad \alpha > 0,\, u \in H.$

$(G_\alpha.5)$ $\|\alpha G_\alpha u - u\| \to 0 \ (\alpha \to \infty), \quad u \in H.$

各 $\beta > 0$ に対して，H 上の二次形式 $\mathcal{E}^{(\beta)}$ を (2.9) で定義する;

$$\mathcal{E}^{(\beta)}(u,v) := \beta\langle u - \beta G_\beta u, v\rangle, \quad u,v \in H.$$

すると，$(G_\alpha.3)$-$(G_\alpha.5)$ により，補題 2.1 と全く同様に $\mathcal{E}^{(\beta)}$ は，補題 2.1 における以下の性質をもつことがわかる：

補題 2.3 (i) $0 < \alpha \le \beta \quad \Longrightarrow \quad 0 \le \mathcal{E}^{(\alpha)}(f,f) \le \mathcal{E}^{(\beta)}(f,f), \quad f \in H;$

(ii) $\mathcal{E}^{(\beta)}(f, \beta G_\beta f) \le \mathcal{E}^{(\beta)}(f,f), \quad f \in H,\ \beta > 0.$

上の補題の (i) により，各 $u \in H$ に対して，$\mathcal{E}^{(\beta)}(u,u)$ は $\beta > 0$ に関して単調増加より

$$\mathcal{E}(u,u) := \uparrow \lim_{\beta\to\infty} \mathcal{E}^{(\beta)}(u,u) = \sup_{\beta>0} \mathcal{E}^{(\beta)}(u,u) \le \infty$$

が存在する．そうして，

$$\mathcal{F} := \left\{ u \in H : \ \mathcal{E}(u,u) = \sup_{\beta>0} \mathcal{E}^{(\beta)}(u,u) < \infty \right\}$$

と定める．

定理 2.2 $\mathcal{F}$ は H の部分空間である．また，各 $u,v \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\mathcal{E}(u,v) := \frac{\mathcal{E}(u+v,u+v) - \mathcal{E}(u-v,u-v)}{4}$$

と定めると，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は H 上の対称閉形式となる．また，以下の性質が成り立つ：

(i) 各 $\beta > 0$ に対して，$G_\beta(H) \subset \mathcal{F}$;

(ii) $\mathcal{E}_\alpha(G_\alpha f, v) = \langle f, v\rangle, \quad f \in H,\, u \in \mathcal{F},\, \alpha > 0.$ 　但し，

$$\mathcal{E}_\alpha(u,v) := \mathcal{E}(u,v) + \alpha\langle u,v\rangle, \quad u,v \in \mathcal{F},\, \alpha > 0;$$

(iii) $\mathcal{E}(\beta G_\beta f, \beta G_\beta f) \le \mathcal{E}^{(\beta)}(f,f), \quad f \in H,\ \beta > 0;$

(iv) $\mathcal{E}^{(\beta)}(f,v) = \mathcal{E}(\beta G_\beta f, v), \quad f \in H,\ v \in \mathcal{F},\ \beta > 0.$

Proof: (i)(ii) より，$\{G_\beta\}$ は $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の Resolvent であることがわかるので，(iii)(iv) は補題 2.1 より明らか．よって，(i)(ii) を示すことにする．まず，$u,v \in \mathcal{F},\, \alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathcal{E}^{(\beta)}(\alpha u, \alpha u) = \alpha^2 \mathcal{E}^{(\beta)}(u,u),\, \beta > 0$ より，$\alpha u \in \mathcal{F}$ であることがわかる．また，

$$0 \le \mathcal{E}^{(\beta)}(u-v,u-v) = 2\mathcal{E}^{(\beta)}(u,u) + 2\mathcal{E}^{(\beta)}(v,v) - \mathcal{E}^{(\beta)}(u+v,u+v)$$

より，

$$\mathcal{E}^{(\beta)}(u+v,u+v) \le 2\mathcal{E}^{(\beta)}(u,u) + 2\mathcal{E}^{(\beta)}(v,v)$$

が成立することから，$u+v \in \mathcal{F}$ が従う．よって，$\mathcal{F}$ が H の部分空間であることがわかる．

定理 2.1 の後半の証明から，$G_\alpha(H)$ は $\alpha > 0$ に無関係であることがわかる．そこで，$u \in G_\alpha(H)$ をとると，適当な $f \in H$ が存在して，$u = G_\alpha f$ となる．このとき，Resolvent 方程式及び強連続性 $(G_\alpha.5)$ により，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{(\beta)}(u,u) &= \beta\langle G_\alpha f - \beta G_\beta G_\alpha f, G_\alpha f\rangle = \beta\langle G_\beta f - \alpha G_\beta G_\alpha f, G_\alpha f\rangle \\ &= \beta\langle G_\beta(f - \alpha G_\alpha f), G_\alpha f\rangle \to \langle f - \alpha G_\alpha f, G_\alpha f\rangle \quad (\beta \to \infty)\end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち，$u \in \mathcal{F}$ であり，

$$\mathcal{E}(u,u) = \langle f - \alpha G_\alpha f, G_\alpha f \rangle, \quad u = G_\alpha f,\ f \in H \tag{2.10}$$

が成り立つ．これは，$G_\alpha(H) \subset \mathcal{F}$ であることを示している．また，$(G_\alpha.5)$ から，明らかに $G_\alpha(H)$ は H で稠密である．従って，$\mathcal{F}$ は H の稠密な部分空間であることも分かる．次に，$\alpha > 0$ に対して，$(\mathcal{F}, \sqrt{\mathcal{E}_\alpha})$ が Hilbert 空間であることを示す．そこで，$\{u_n\} \subset \mathcal{F}$ を $\sqrt{\mathcal{E}_\alpha}$-Cauchy 列とする：

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathcal{E}_\alpha(u_n - u_m, u_n - u_m) = 0.$$

ところで，$(u,u) \le (1/\alpha)\mathcal{E}_\alpha(u,u),\ u \in \mathcal{F}$ より，$\{u_n\}$ は H における Cauchy 列でもある．よって，適当な $u \in H$ が存在して，$\|u_n - u\| \to 0\ (n \to \infty)$ となる．以下，$u \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}_\alpha(u_n - u, u_n - u) \to 0\ (n \to \infty)$ を示す．$(G_\alpha.5)$ より

$$\|\beta G_\beta u_n - \beta G_\beta u\| \le \|u_n - u\| \to 0 \quad (n \to \infty), \quad \beta > 0$$

となるから，

$$\mathcal{E}^{(\beta)}(u,u) = \beta(u - \beta G_\beta u, u) = \lim_{n\to\infty} \beta\langle u_n - \beta G_\beta u_n, u_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}^{(\beta)}(u_n,u_n) \le \limsup_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n,u_n)$$

より，$\sup_{\beta>0} \mathcal{E}^{(\beta)}(u,u) < \infty$ であることがわかる．よって，$u \in \mathcal{F}$. 次に，任意の $\beta > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{(\beta)}(u_n - u, u_n - u) &= \beta\big\langle (u_n - u) - \beta G_\beta(u_n - u), u_n - u\big\rangle \\
&= \lim_{m\to\infty} \beta\big\langle (u_n - u_m) - \beta G_\beta(u_n - u_m), u_n - u_m\big\rangle \\
&= \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}^{(\beta)}(u_n - u_m, u_n - u_m) \\
&\le \limsup_{m\to\infty} \mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m)
\end{aligned}$$

であり，最右辺は n を十分に大きくとると，$\beta > 0$ に対して，一様に小さくすることが出来る．よって，

$$\mathcal{E}(u_n - u, u_n - u) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となることがわかる．ゆえに $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_\alpha)$ は対称閉形式である．

最後に，(ii) を示そう．任意の $f \in H,\ v \in \mathcal{F},\ \alpha > 0$ に対して，$G_\alpha f \in G_\alpha(H) \subset \mathcal{F}$ より，Resolvent 方程式 $(G_\alpha.3)$ 及び強連続性 $(G_\alpha.5)$ から，

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\alpha(G_\alpha f, v) &= \mathcal{E}(G_\alpha f, v) + \alpha(G_\alpha f, v) \\
&= \frac{\mathcal{E}(G_\alpha f + v, G_\alpha f + v) - \mathcal{E}(G_\alpha f - v, G_\alpha f - v)}{4} + \alpha\langle G_\alpha f, v\rangle \\
&= \lim_{\beta\to\infty} \frac{\mathcal{E}^{(\beta)}(G_\alpha f + v, G_\alpha f + v) - \mathcal{E}^{(\beta)}(G_\alpha f - v, G_\alpha f - v)}{4} + \alpha\langle G_\alpha f, v\rangle \\
&= \lim_{\beta\to\infty} \beta\big\langle G_\alpha f - \beta G_\beta G_\alpha f, v\big\rangle + \alpha\langle G_\alpha f, v\rangle \\
&= \lim_{\beta\to\infty} \beta\big\langle G_\beta(f - \alpha G_\alpha f), v\big\rangle + \alpha\langle G_\alpha f, v\rangle \\
&= \langle f - \alpha G_\alpha f, v\rangle + \alpha\langle G_\alpha f, v\rangle \ = \ \langle f, v\rangle
\end{aligned}$$

となり，(ii) が示された． □

ここでは，Resolvent を通して (対称) 閉形式との対応及び特徴付けを行ったが，Hilbert 空間上の自己共役作用素のスペクトル分解理論を用いると，半群を用いた閉形式の性質および特徴づけも可能である．次の定理は都合上省略するが，後に用いるので結果だけ述べておく．

定理 2.3 $\{T_t; t > 0\}$, $\{G_\alpha, \alpha > 0\}$ を H 上の (対称) 閉形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対応する強連続な半群とする．このとき，以下のことが成立する：

(i) 各 $u\in H$ に対して，$t\mapsto (1/t)\langle u-T_tu,u\rangle\ (\geq 0)$ は $t\downarrow 0$ のとき単調増加であり，

$$\mathcal{F}=\Big\{u\in H:\ \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\big\langle u-T_tu,u\big\rangle<\infty\Big\},\quad \mathcal{E}(u,v)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\big\langle u-T_tu,v\big\rangle,\quad u,v\in\mathcal{F}.$$

(ii) 各 $t>0$ に対して，$T_t(H)\subset\mathcal{F},\ \mathcal{E}(T_tu,T_tu)\leq\frac{1}{2t}\big\{\langle u,u\rangle-\langle T_tu,T_tu\rangle\big\}\leq\mathcal{E}(u,u),\ u\in\mathcal{F}.$

定義 2.1 $L^2(E;m)$ 上の対称閉形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が次の性質を持つとき Markov 的である，あるいは**正規縮小に安定的である**という：

($\boldsymbol{\mathcal{E}}$**.3**) $\forall u\in\mathcal{F},\,T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を正規縮小 $\quad\Longrightarrow\quad v:=T(u)\in\mathcal{F},\ \mathcal{E}(v,v)\leq\mathcal{E}(u,u).$

ここで，$T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が **正規縮小** (a normal contraction) であるとは，

$$\big|T(t)\big|\leq|t|,\quad \big|T(t)-T(s)\big|\leq|t-s|,\quad t,s\in\mathbb{R}$$

を満たすときを言う．また，次の性質が成り立つとき，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は**単位縮小に安定的である**という：

($\boldsymbol{\mathcal{E}}$**.3**)**′** $\forall u\in\mathcal{F},\ v:=0\vee u\wedge 1\quad\Longrightarrow\quad v\in\mathcal{F},\ \mathcal{E}(v,v)\leq\mathcal{E}(u,u).$

Markov 的である $L^2(E;m)$ 上の対称閉形式を **(対称)Dirichlet 形式**と呼ぶ.

命題 2.1 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(E;m)$ 上の対称閉形式とし，$\{T_t\}_{t>0}$ 及び $\{G_\alpha\}_{\alpha>0}$ を，それぞれ対応する $L^2(E;m)$ 上の強連続な半群，強連続な Resolvent とする．このとき，以下の条件はすべて同値である:

(i) $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は Markov 的である，すなわち，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は Dirichlet 形式である;

(ii) $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は単位縮小に安定的である，すなわち，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は ($\boldsymbol{\mathcal{E}}$**.3**)**′** を満たす;

(iii) $\{T_t\}_{t>0}$ は Markov 的である．i.e., $f\in L^2(E;m),\ 0\leq f\leq 1,\ m\text{-a.e.}\ \Rightarrow\ 0\leq T_tf\leq 1,\ m\text{-a.e. for } t>0;$

(iv) $\{G_\alpha\}_{\alpha>0}$ は Markov 的である． i.e., $f\in L^2(E;m),\ 0\leq f\leq 1,\ m\text{-a.e.}\ \Rightarrow\ 0\leq \alpha G_\alpha f\leq 1,\ m\text{-a.e. for } \alpha>0.$

Proof: (iii) と (iv) の同値性は半群と Resolvent の関係式より明らかである．また，$U(t):=0\vee t\wedge 1,\ t\in\mathbb{R}$ は正規縮小であるから，“(i)⇒(ii)” が成り立つ.
(ii)⇒(iv): $f\in L^2(E;m),\ 0\leq f\leq 1$ をとり，このとき，$u=\alpha G_\alpha f$ とおく．$v:=0\vee u\wedge 1$ とおくと，($\boldsymbol{\mathcal{E}}$**.3**)**′** より，$v\in\mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(v,v)\leq\mathcal{E}(u,u)$ が成立する．よって，

$$\begin{aligned}0\ &\geq\ -\frac{1}{2}\big\{\mathcal{E}(u-v,u+v)+\mathcal{E}(u-v,u-v)\big\}\ =\ -\mathcal{E}(u,u-v)\\ &=\ -\mathcal{E}_\alpha(u,u-v)+\alpha(u,u-v)\ =\ -\alpha\mathcal{E}_\alpha(G_\alpha f,u-v)+\alpha(u,u-v)\\ &=\ \alpha(u-f,u-v)\ =\ \alpha(u-v,u-v)+\alpha(v-f,u-v).\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}(v-f,u-v)\ &=\ \int_E\Big(\big(0\vee u(x)\wedge 1\big)-f(x)\Big)\Big(u(x)-\big(0\vee u(x)\wedge 1\big)\Big)m(dx)\\ &=\ \int_{\{u\leq 0\}}\big(-f(x)\big)u(x)m(dx)+\int_{\{u(x)\geq 1\}}\big(1-f(x)\big)\big(u(x)-1\big)m(dx)\\ &\geq\ 0\end{aligned}$$

が成り立つことから，$(u-v,u-v)=\|u-0\vee u(x)\wedge 1\|^2=0$ でなければならない．よって，$u(x)=0\vee u(x)\wedge 1, m\text{-a.e.}$ $\Longleftrightarrow\ \alpha G_\alpha f(x)=0\vee\alpha G_\alpha f(x)\wedge 1,\ m\text{-a.e}$，すなわち，$0\leq\alpha G_\alpha f(x)\leq 1,\ m\text{-a.e.}$ が成り立つ.
(iv)⇒(i): 仮定により G_α は $L^\infty(E;m)$ 上の有界線形作用素に拡張されることに注意しておく． 任意に $u\in\mathcal{F}$ をとり，$T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を任意の正規縮小とする．このとき，任意の $\beta>0$ に対して,

$$\big(T(u)-\beta G_\beta T(u),T(u)\big)\leq\big(u-\beta G_\beta u,u\big),\quad u\in L^2(E;m)\tag{2.11}$$

が成り立てば，補題 2.2 より (i) が成立することが分かる，実際，$u \in \mathcal{F}$ であるから，(2.11) の右辺は，更に $\mathcal{E}(u,u)$ で上から評価されるので，すべての $\beta > 0$ に対して，

$$\mathcal{E}(T(u),T(u)) = \sup_{\beta>0} \big(T(u) - \beta G_\beta T(u), T(u)\big) \le \mathcal{E}(u,u) < \infty$$

が成立することになる．

以下，(2.11) を示すことにする．各 $u \in L^2(E;m)$ に対して $u_n(x) := (-n) \vee \big(u(x) \wedge n\big)$, $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$ とおくと，$u_n \in L^2(E;m) \cap L^\infty(E;m)$ であり，また $(G_\alpha.4)$ より

$$\begin{aligned}
\Big|(u_n - \beta G_\beta u_n, u_n) - (u - \beta G_\beta u, u)\Big| &= \Big|\big((u_n - u) - \beta G_\beta(u_n - u), u_n\big) + (u - \beta G_\beta u, u_n - u)\Big| \\
&\le \Big(\|u_n - u\| + \|\beta G_\beta(u_n - u)\|\Big)\|u_n\| + \|u - \beta G_\beta u\| \cdot \|u_n - u\| \\
&\le 2\|u_n - u\| \cdot \|u_n\| + \big(\|u\| + \|\beta G_\beta u\|\big)\|u_n - u\| \\
&\le 2\|u_n - u\|\big(\|u_n\| + 2\|u\|\big) \ \le\ 6\|u\| \cdot \|u_n - u\|
\end{aligned}$$

が成り立つ．両辺 $n \to \infty$ とすると，右辺は，$\beta > 0$ に一様に (無関係に) 0 に収束することがわかる．よって，有界な u_n に対して (2.11) を示せば十分であることがわかる．ところで，有界な $u \in L^2(E;m)$ に対しては，単調増加で有界な単関数列 $\{\varphi_n\}$ が存在して，$\|\varphi_n - u\| \to 0$ $(n \to \infty)$ と出来る．よって，(2.11) を有界な単関数 u に対して示せば十分であることがわかる．そこで，

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(x), \quad x \in E,$$

とおく．但し，$\max\{|a_i| :\ i = 1,2,\dots,n\} < \infty,\ a_i \ne a_j,\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ (i \ne j)$ かつ $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$ とする．このとき，各 $i,j = 1,2,\dots,n$ に対して，

$$\Lambda_{ij} := \big(1_{A_i} - \beta G_\beta 1_{A_i}, 1_{A_j}\big), \quad \Gamma_{ij} := \big(\beta G_\beta 1_{A_i}, 1_{A_j}\big), \quad \lambda_i := (1_{A_i}, 1_{A_i})$$

とおくと，G_β の対称性より $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ji}$, $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$ が成り立つ．また，$\{G_\alpha\}_{\alpha>0}$ は Markov 的であることから，

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_{ij} = \sum_{i=1}^n (\beta G_\beta 1_{A_i}, 1_{A_j}) = \Big(\beta G_\beta\big(\sum_{i=1}^n 1_{A_i}\big), 1_{A_j}\Big) = (\beta G_\beta 1, 1_{A_j}) \le (1, 1_{A_j}) = \lambda_j$$

となる．また，$\Lambda_{ij} = (1_{A_i}, 1_{A_j}) - (\beta G_\beta 1_{A_i}, 1_{A_j}) = \lambda_i \delta_{ij} - \Gamma_{ij}$ である (但し，δ_{ij} は Kronecker のデルタである)．よって，

$$\begin{aligned}
\big(\varphi - \beta G_\beta \varphi, \varphi\big) &= \int_E \Big\{\sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i} - a_i \beta G_\beta 1_{A_i}\Big\} \sum_{j=1}^n a_j 1_{A_j}\, dm \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \int_E \Big(1_{A_i} - \beta G_\beta 1_{A_i}\Big) 1_{A_j}\, dm \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \Lambda_{ij} \ =\ \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \big(\lambda_i \delta_{ij} - \Gamma_{ij}\big) \\
&= \sum_{i<j} \Gamma_{ij}(a_i - a_j)^2 + \sum_{j=1}^n a_j^2 \big(\lambda_j - \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}\big)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の正規縮小とすると，

$$\big(T(a_i) - T(a_j)\big)^2 \le (a_i - a_j)^2, \quad \big(T(a_i)\big)^2 \le a_i^2, \quad i,j = 1,2,\dots,n$$

であるから，

$$\Big(T(\varphi) - \beta G_\beta\big(T(\varphi)\big), T(\varphi)\Big) \ =\ \sum_{i<j} \Gamma_{ij} \big(T(a_i) - T(a_j)\big)^2 + \sum_{j=1}^n \big(T(a_j)\big)^2 \big(\lambda_j - \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}\big)$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{i<j}\Gamma_{ij}(a_i-a_j)^2+\sum_{j=1}^{n}a_j^2\big(\lambda_j-\sum_{i=1}^{n}\Gamma_{ij}\big)\\
&= \big(\varphi-\beta G_\beta\varphi,\varphi\big)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって，$u\in L^\infty(E;m)\cap L^2(E;m)$ に対して，$\varphi_n\nearrow u$ m-a.e. を満たす単函数列 $\{\varphi_n\}$ を選べば，

$$\mathcal{E}^{(\beta)}\big(T(\varphi_n),T(\varphi_n)\big)\le\mathcal{E}^{(\beta)}(\varphi_n,\varphi_n).$$

そして，$n\to\infty$ とし，その後 $\beta\to\infty$ とすれば (i) が得られる． □

補題 2.4 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(E;m)$ 上の Dirichlet 形式とし，$\{G_\alpha;\alpha>0\}$ を対応する強連続な Resolvent とする．このとき，任意の $u\in\mathcal{F}$, $\alpha>0$ に対して，

$$\mathcal{E}_\alpha(\beta G_\beta u-u,\beta G_\beta u-u)\to 0\quad(\beta\to\infty).$$

Proof: はじめに，各 $\alpha>0$ に対して，$\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{F}$ が Hilbert 空間 $(\mathcal{F},\mathcal{E}_\alpha)$ の稠密な部分空間であることを示そう．任意に $u,v\in\mathcal{F}$ をとり，それを固定する．このとき，各 $\beta>0$ に対して，補題 2.1(iv) から，$\mathcal{E}(\beta G_\beta u,v)=\mathcal{E}^{(\beta)}(u,v)$ に注意して，補題 2.1(ii),(iv) を用いると，

$$\mathcal{E}(\beta G_\beta u,\beta G_\beta u)=\mathcal{E}^{(\beta)}(u,\beta G_\alpha u)\le\mathcal{E}^{(\beta)}(u,u)$$

となる．よって，

$$\mathcal{E}(\beta G_\beta u,\beta G_\beta u)\le\mathcal{E}^{(\beta)}(u,u)=\mathcal{E}(\beta G_\beta u,u)\le\sqrt{\mathcal{E}(\beta G_\beta u,\beta G_\beta u)}\sqrt{\mathcal{E}(u,u)},$$

すなわち，$\mathcal{E}(\beta G_\beta u,\beta G_\beta u)\le\mathcal{E}(u,u)$ が成り立つ．更に，$\|\beta G_\beta u\|\le\|u\|$ に注意すると，

$$\mathcal{E}_\alpha(\beta G_\beta u,\beta G_\beta u)\le\mathcal{E}_\alpha(u,u)\tag{2.12}$$

が任意の $\alpha>0$ に対して成り立つ．よって，$u\in\mathcal{F}$ に対して，

$$\sup_{\beta>0}\mathcal{E}_\alpha(\beta G_\beta u,\beta G_\beta u)\le\mathcal{E}_\alpha(u,u)<\infty$$

が成り立つから，Banach-Alaoglu の定理及び Banach-Saks の定理を用いることにより，適当な部分列 $\{\beta_n\}$ が存在して，$\beta_n\to\infty$ $(n\to\infty)$ かつ $\{\beta_n G_{\beta_n}u\}$ の Cesàro 平均は u に，ノルム $\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(\cdot,\cdot)}$ に関して強収束する．一方，$\beta_n G_{\beta_n}u\in G_{\beta_n}\big(L^2(E;m)\big)=\mathcal{D}(A)$ であるから，$\mathcal{D}(A)$ は $(\mathcal{F},\sqrt{\mathcal{E}_\alpha})$ の稠密な部分空間であることがわかる．

$u\in\mathcal{D}(A)$ に対して，適当な $f\in L^2(E;m)$ が存在して，$u=G_\alpha f$ となる．このとき，

$$\mathcal{E}_\alpha(\beta G_\beta u-u,\beta G_\beta u-u)=(\beta G_\beta f-f,\beta G_\beta u-u)\to 0\quad(\beta\to\infty)$$

である．任意の $w\in\mathcal{F}$ 及び $\varepsilon>0$ に対して，$\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(w-u,w-u)}<\varepsilon/2$ を満たす $u\in\mathcal{D}(A)$ が存在する．よって，ノルム $\sqrt{\mathcal{E}_\alpha}$ に対する三角不等式，及び (2.12) より

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(\beta G_\beta w-w,\beta G_\beta w-w)}&\le\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(\beta G_\beta w-\beta G_\beta u,\beta G_\beta w-\beta G_\beta u)}\\
&\qquad+\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(\beta G_\beta u-u,\beta G_\beta u-u)}+\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(u-w,u-w)}\\
&\le 2\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(w-u,w-u)}+\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(\beta G_\beta u-u,\beta G_\beta u-u)}\\
&< 2\varepsilon+\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(\beta G_\beta u-u,\beta G_\beta u-u)}\ \to 2\varepsilon\quad(\beta\to\infty)
\end{aligned}
$$

であり，$\varepsilon\to 0$ とすることにより，任意の $w\in\mathcal{F}$ に対して，$\beta G_\beta w\to w$ $(\beta\to\infty)$ w.r.t. $\sqrt{\mathcal{E}_\alpha}$ が成り立つ． □

定義 2.2 $L^2(E;m)$ 上の Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は，次の条件を満たすとき **正則** (regular) であるという：

(1) $\mathcal{F}\cap C_0(E)$ は $\mathcal{F}$ において，$\mathcal{E}_1$ に関して稠密である；

(2) $\mathcal{F}\cap C_0(E)$ は $C_0(E)$ において，$\|\cdot\|_\infty$ に関して稠密である．

但し，$C_0(E)$ は台がコンパクトな E 上の連続関数全体を表す．

補題 2.5 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(E;m)$ 上の Dirichlet 形式とする．$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が正則であるならば，次が成立する：

$$\begin{aligned}&\forall u\in C_0(E),\ \exists\{u_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{F}\cap C_0(E)\ \text{s.t.}\\&\qquad \mathrm{supp}[u_n]\subset\{x\in E:u(x)\neq 0\}\ \bigl(\subset\mathrm{supp}[u]\bigr),\ n=1,2,3,\dots,\\&\qquad \lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|_\infty=0.\end{aligned}$$

Proof: $u\in C_0(E)$ を任意に取る．仮定より $\{\tilde u_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{F}\cap C_0(E)$ で，$\|u-\tilde u_n\|_\infty<1/n,\ n=1,2,\dots$ を満たすものが存在する． 任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$(\tilde u_n)^{(\varepsilon)}:=\tilde u_n(x)-\bigl\{\bigl((-\varepsilon)\vee\tilde u_n(x)\bigr)\wedge\varepsilon\bigr\},\quad x\in E$$

とおくと，$(\tilde u_n)^{(\varepsilon)}$ は $\tilde u_n$ の正規縮小であり，更に $\varepsilon\to 0$ のとき，

$$\|(\tilde u_n)^{(\varepsilon)}-\tilde u_n\|_\infty=\|\bigl((-\varepsilon)\vee\tilde u_n\bigr)\wedge\varepsilon\|\le\varepsilon\to 0$$

となる．そこで，$\varepsilon=1/n$ とおくと，$u(x)=0$ となる $x\in E$ に対しては $|\tilde u_n(x)|=|\tilde u_n(x)-u(x)|<1/n$ より，$(\tilde u_n)^{(1/n)}(x)=0$ となる．よって，$u_n:=(\tilde u_n)^{(1/n)}$ とおくと，$u_n\in\mathcal{F}\cap C_0(E)$ であり，

$$\mathrm{supp}[u_n]\subset\{x\in E:u(x)\neq 0\}\ \bigl(\subset\mathrm{supp}[u]\bigr),\ n=1,2,3,\dots,$$

かつ

$$\|u_n-u\|_\infty\le\|u_n-\tilde u_n\|_\infty+\|\tilde u_n-u\|_\infty\le\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n}\to 0,\quad n\to\infty$$

となる． □

定理 2.4 $L^2(E;m)$ 上の Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は次の性質を持つ：

(i) $u,v\in\mathcal{F}\quad\Longrightarrow\quad u\wedge v,\ u\vee v,\ u\wedge 1\in\mathcal{F}.$

(ii) $u\in\mathcal{F}\quad\Longrightarrow\quad u_n:=(-n\vee u)\wedge n\in\mathcal{F}\ (n=1,2,\dots)$ かつ $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_1(u_n-u,u_n-u)=0.$

Proof: (i). $u\in\mathcal{F}$ に対して，$|u|$ は u の正規縮小だから，$|u|\in\mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(|u|,|u|)\le\mathcal{E}(u,u)$ が成り立つ．よって，

$$u\vee v=\frac{1}{2}\bigl(u+v+|u-v|\bigr),\quad u\wedge v=\frac{1}{2}\bigl(u+v-|u-v|\bigr)$$

から，$u\vee v,\ u\wedge v\in\mathcal{F}$ は分かる． $u\wedge 1$ は u の正規縮小であるから，$u\wedge 1\in\mathcal{F}$ も出てくる．

(ii). 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，$u_n:=\bigl(-n\vee u\bigr)\wedge n$ は u の正規縮小だから $u_n\in\mathcal{F},\ \mathcal{E}(u_n,u_n)\le\mathcal{E}(u,u)$. 次に，$k<\ell$ に対して u_k は u_ℓ の正規縮小でもあるから，$\mathcal{E}(u_k,u_k)\le\mathcal{E}(u_\ell,u_\ell)$ が成り立つ．よって，$\{\mathcal{E}(u_n,u_n)\}_{n=1}^\infty$ は有界な単調増加列となるから，有限な値 $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u_n,u_n)\,(\le\mathcal{E}(u,u))$ が存在する．一方，$v\in G_\alpha(L^2(E;m))$ $\bigl(\Leftrightarrow v=G_\alpha f,\ f\in L^2(E;m)\bigr)$ に対して，

$$\mathcal{E}_1(u_k,v)=\mathcal{E}_1(u_k,G_1f)=(u_k,f)\to(u,f)=\mathcal{E}_1(u,G_1f)=\mathcal{E}_1(u,v),\quad k\to\infty$$

より，

$$\mathcal{E}_1(u_n-u,u_n-u)=\mathcal{E}_1(u_n,u_n)-2\mathcal{E}_1(u_n,u)+\mathcal{E}_1(u,u)\le 2\mathcal{E}_1(u,u)-2\mathcal{E}_1(u_n,u)\to 0\ (n\to\infty).$$

□

2.2 例

ここでは，典型的な Dirichlet 形式の例をいくつか挙げる．$D \subset \mathbb{R}^d$ を開集合とする．$m(dx) = dx$ は D 上の Lebesgue 測度を表す．

例題 2.1 $A(x) = (a_{ij}(x))$ を，d 次正方行列値可測函数で次の条件を満たすものとする：

(a.1) 任意の i, j に対して，$a_{ij} = a_{ji} \in L^1_{\mathsf{loc}}(D) := L^1_{\mathsf{loc}}(D; dx)$;

(a.2) (**一様楕円性**:uniformly ellipticity) 適当な $\lambda > 0$ が存在して，

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, \quad x \in D,\ \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d.$$

このとき，

$$\mathcal{E}(u, v) = \sum_{i,j=1}^d \int_D a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)dx, \quad u, v \in C_0^\infty(D) \tag{2.13}$$

で定義される対称な二次形式 $(\mathcal{E}, C_0^\infty(D))$ は $L^2(D; dx)$ 上の Markov 的な可閉形式となる．

まず，$C_0^\infty(D)$ の元 u に対して，$\mathcal{E}(u, u) < \infty$ となることに注意する．実際，$u \in C_0^\infty(D)$ の台はコンパクトなので，それを K とおくと，a_{ij} は K 上では可積分関数だから，

$$\mathcal{E}(u, u) \leq \sum_{i,j=1}^d \int_K |a_{ij}(x)| \cdot \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|dx \leq \sum_{i,j=1}^d \Big(\sup_{x \in K}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\Big|\Big)\int_K |a_{ij}(x)|dx < \infty.$$

次に可閉性であるが，$\{u_n\} \subset C_0^\infty(D)$ を

$$\mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m) \to \ (n, m \to \infty), \quad (u_n, u_n) \to 0\ (n \to \infty)$$

を満たすとする．すると，(a.2) により

$$\lambda \int_D \Big|\nabla(u_n - u_m)\Big|^2 dx \leq \sum_{i,j=1}^d \int_D a_{ij}\Big(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\Big)\Big(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j}\Big)dx = \mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m)$$

であるから，各 $i = 1, 2, \ldots, d$ に対して $\{\partial u_n/\partial x_i\}$ は $L^2(D)$ において Cauchy 列となる．よって，適当な $v_i \in L^2(D)$ が存在して，$\int_D \big|\frac{\partial u}{\partial x_i} - v_i\big|^2 dx \to 0\ (n \to \infty)$ となる．一方，任意の $\varphi \in C_0^\infty(D)$ に対して，部分積分の公式により

$$\int_D u_n(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_D \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx, \quad i = 1, 2, \ldots, d$$

が成り立つ．$(u_n, u_n) \to 0\ (n \to \infty)$ であることに注意して，両辺 $n \to \infty$ とすると，左辺は 0 に，右辺は $-\int_D v_i\varphi dx$ に収束する．一方，$\varphi \in C_0^\infty(D)$ は任意だったから，$v_i = 0$ が分かる．よって，$\partial u_n/\partial x_i$ は 0 に $L^2(D)$ において強収束するから，適当に部分列 $\{n_k\}$ をとると，$\partial u_{n_k}/\partial x_i$ は 0 に D 上 a.e. で収束する．すると，Fatou の補題によって

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(u_n, u_n) &= \int_D \lim_{n_k \to \infty} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\Big(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_i}\Big)\Big(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_j}\Big)dx \\
&\leq \varliminf_{n_k \to \infty} \int_D \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\Big(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_i}\Big)\Big(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_j}\Big)dx \\
&= \lim_{n_k \to \infty} \mathcal{E}(u_n - u_{n_k}, u_n - u_{n_k})
\end{aligned}$$

となることから，$n \to \infty$ とすると $\mathcal{E}(u_n, u_n) \to 0$ を得る．従って，$\mathcal{E}$ は可閉形式であることが分かる．

最後に $\mathcal{E}$ が Markov 的であることの証明であるが，$(\mathcal{E}.3)$ や $(\mathcal{E}.3)'$ より弱い次の条件 (実は，閉形式の場合は同値になる) を示すことによって行う:

(ℰ.3)″ 任意の $\varepsilon>0$ に対して，次の条件を満たす $\phi_\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が存在する：

$$\phi_\varepsilon(t)=t,\ t\in[0,1],\quad -\varepsilon\le\phi_\varepsilon(t)\le 1+\varepsilon,\ t\in\mathbb{R},\quad 0\le\phi_\varepsilon(s)-\phi_\varepsilon(t)\le s-t,\ s>t, \tag{2.14}$$

$$u\in\mathcal{D}[\mathcal{E}]\quad\Longrightarrow\quad \phi_\varepsilon(u)\in\mathcal{D}[\mathcal{E}],\ \ \mathcal{E}(\phi_\varepsilon(u),\phi_\varepsilon(u))\le\mathcal{E}(u,u). \tag{2.15}$$

軟化子の考えを使うことにより，任意の $\varepsilon>0$ に対して (2.14) を満たす関数 $\phi_\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{R})$ が存在することは明らか．この ϕ_ε を用いると，$u\in C_0^\infty(D)$ に対して，$\phi_\varepsilon(u)\in C_0^\infty(D)$ であることもわかる．$0\le\phi_\varepsilon'(t)\le 1$ に注意すると

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\phi_\varepsilon(u),\phi_\varepsilon(u))&=\sum_{i,j=1}^d\int_D a_{ij}(x)\frac{\partial\phi_\varepsilon(u)}{\partial x_i}(x)\frac{\partial\phi_\varepsilon(u)}{\partial x_j}dx\\&=\sum_{i,j=1}^d\int_D a_{ij}(x)\big(\phi_\varepsilon'(u(x))\big)^2\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}dx\ \ \le\mathcal{E}(u,u)\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに，Markov 的であることがわかった． □

この例で，$D=\mathbb{R}^d$，$a_{ij}(x)=\delta_{ij}(x)$ とおいて定義される二次形式:

$$\mathcal{E}(u,v)=\sum_{i=1}^d\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)dx=\mathsf{D}(u,v)$$

は Dirichlet 積分であり，このとき，$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ の閉包が 1 階の Sobolev 空間と一致することは知られている：

$$\mathcal{F}:=\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^d)}^{\sqrt{\mathsf{D}_1}}=W_0^{1,2}(\mathbb{R}^d)=W^{1,2}(\mathbb{R}^d)=\Big\{u\in L^2(\mathbb{R}):\ \partial u/\partial x_i\in L^2(\mathbb{R}^d),\ i=1,2,\ldots,d\Big\}.$$

ここで，$u\in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\partial u/\partial x_i$ は超関数の意味での微分を意味する．また，

$$T_tu(x):=\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}u(y)e^{-|x-y|^2/2t}dy,\quad u\in L^2(\mathbb{R}^d),\ t>0 \tag{2.16}$$

とおくと，$\{T_t,t>0\}$ は $(\frac{1}{2}\mathsf{D},W^{1,2}(\mathbb{R}^d))$ に対応する半群となる．さらに，

$$-\frac{1}{2}\Delta u(x)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{u(x)-T_tu(x)}{t},\quad x,\in\mathbb{R}^d,\ u\in C_0^2(\mathbb{R}^d)$$

が成り立つ．なお，この極限は一様収束である．$u\in W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$ のときは $L^2(\mathbb{R}^d)$ のノルムでの収束となる．ここでは，簡単のため各点収束のみ確認しておく． $1/(2\pi t)^{d/2}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|h|^2/2t}dh=1$ に注意すると，

$$\begin{aligned}\frac{u(x)-T_tu(x)}{t}&=\frac{1}{t}\Big\{u(x)-\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}u(y)e^{-|x-y|^2/2t}dy\Big\}\\&=-\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(u\big(x+h\big)-u\big(x\big)\Big)e^{-|h|^2/2t}dh\qquad(y\mapsto x+h)\\&=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_0^1(1-s)'\frac{d}{ds}\big\{u(x+sh)\big\}ds\Big)e^{-|h|^2/2t}dh\\&=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\Big[(1-s)\nabla u(x+sh)\cdot h\Big]_0^1-\int_0^1(1-s)\frac{d^2}{ds^2}\big\{u(x+sh)\big\}ds\Big)e^{-|h|^2/2t}dh\\&=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\Big\{-\sum_{i=1}^d\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)h_i-\int_0^1(1-s)\sum_{i,j=1}^d\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}(x+sh)h_ih_jds\Big\}e^{-|h|^2/2t}dh\\&=-\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\Big\{\sum_{i=1}^d\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}h_ie^{-|h|^2/2t}dh}_{=0}\\&\qquad+t^{1+d/2}\sum_{i,j=1}^d\int_0^1(1-s)\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}(x+s\sqrt{t}h)h_ih_je^{-|h|^2/2}dh\Big)ds\Big\}\quad(h\mapsto\sqrt{t}h)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\sum_{i,j=1}^{d}\int_0^1(1-s)\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x+s\sqrt{t}h)h_ih_je^{-|h|^2/2}dh\Big)ds\\
&\to -\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x)\int_0^1(1-s)\Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}h_ih_je^{-|h|^2/2}dh}_{\begin{cases}=0 \text{ if } i\neq j\\ =(2\pi)^{d/2}\text{ if } i=j\end{cases}}\Big)ds \quad (t\downarrow 0)\\
&= -\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)\int_0^1(1-s)ds = -\frac{1}{2}\Delta u(x)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，6 つ目の等号では Fubini の定理を，“$\to$” では Lebesgue の収束定理と関数 u の 2 階の偏導関数の連続性を用いた．

例題 2.2 m を D 上の至る所正である Radon 測度とし，$J(x,dy)$ を，次を満たす D 上の核とする：

(J.1) $\displaystyle\int_A J(x,B)m(dx) = \int_B J(x,A)m(dx), \quad \forall A,B\in\mathcal{B}(D).$

(J.2) $\displaystyle x\mapsto\int_{y\neq x}\big(1\wedge|x-y|^2\big)J(x,dy)\in L^1_{\mathsf{loc}}(D;m).$

このとき，

$$
\begin{cases}
\mathcal{E}(u,v) &:= \displaystyle\iint_{D\times D\setminus\mathsf{diag}}\big(u(x)-u(y)\big)\big(v(x)-v(y)\big)J(x,dy)m(dx),\\
\mathcal{D}[\mathcal{E}] &:= \Big\{u\in L^2(D;m):\ \mathcal{E}(u,u)<\infty\Big\}
\end{cases}
\tag{2.17}
$$

で定義される二次形式 $(\mathcal{E},\mathcal{D}[\mathcal{E}])$ は $L^2(D;m)$ 上の Dirichlet 形式となる．ここで，$\mathsf{diag}=\{(x,x): x\in D\}$ である．なお， 一般に $(\mathcal{E},\mathcal{D}[\mathcal{E}])$ は正則かどうかはわからない．しかし，(J.2) の条件によって，D 内にコンパクト台をもつ Lipschitz 連続関数全体 $C_0^{\mathsf{lip}}(D)$ が $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ に含まれることがわかるので，$C_0^{\mathsf{lip}}(D)$ の閉包を $\mathcal{F}$ とおくと，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は正則な Dirichlet 形式となることがわかる．以下，これらのことを示す．

まず，D 上の Borel 関数 u に対して，$u=0$, m-a.e. ならば $\mathcal{E}(u,u)=0$ を満たすことを示す．そのために，コンパクト集合の単調増大列 $\{K_n\}$ で，$K_n\subset K_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^\infty K_n = D$ となるものをとる．このとき，各 n に対して，$\tilde{K}_n=\{(x,y):\ x,y\in K_n,\ |x-y|>1/n\}$ とおくと，(J.1) より，

$$
\begin{aligned}
\iint_{\tilde{K}_n}\big(u(x)-u(y)\big)^2J(x,dy)m(dx) &= \iint_{\tilde{K}_n}u(y)^2J(x,dy)m(dx) = \iint 1_{\tilde{K}_n}(x,y)u(y)^2J(x,dy)m(dx)\\
&= \iint 1_{\tilde{K}_n}(x,y)u(y)^2J(y,dx)m(dy) = 0
\end{aligned}
$$

が成り立つから，$n\to\infty$ とすれば $\mathcal{E}(u,u)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{\tilde{K}_n}\big(u(x)-u(y)\big)^2J(x,dy)m(dx)=0$ が得られる．

次に，三角不等式 $\big||t|-|s|\big|\le|t-s|, s,t,\in\mathbb{R}$ より，$u\in\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ ならば

$$
\mathcal{E}(|u|,|u|)=\iint_{D\times D\setminus\mathsf{diag}}\big(|u(x)|-|u(y)|\big)^2J(x,dy)m(dx)\le\iint_{D\times D\setminus\mathsf{diag}}\big(u(x)-u(y)\big)^2J(x,dy)m(dx)=\mathcal{E}(u,u)
$$

となるから，Markov 的であることがわかる．

次に $\{u_n\}\subset\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ を $\mathcal{E}_1(u_n-u_m,u_n-u_m)\to 0\ (n,m\to\infty)$ を満たすとする．$\bar{u}_n(x,y)=u_n(x)-u_n(y)$, $x,y\in D$, $x\neq y$ とおくと，$\{\bar{u}_n\}$ は $L^2(D\times D\setminus\mathsf{diag}; J(x,dy)m(dx))$-Cauchy 列となるから収束列となる．よって，適当な $\iint_{N_1}J(x,dy)m(dx)=0$ をみたす $N_1\in\mathcal{B}(D\times D\setminus\mathsf{diag})$ と部分列 $\{n_k\}$ 及び関数 $\bar{u}$ が存在して，$\bar{u}_{n_k}(x,y)\to\bar{u}(x,y)$, $(x,y)\in(D\times D\setminus\mathsf{diag})\setminus N_1$ $(n_k\to\infty)$ が成り立つ．また，$\{u_n\}$ は $L^2(D;m)$ の収束列でもあるから，必要ならば部分列をさらに取ることにより，適当な関数 $u\in L^2(D;m)$ と $m(N_2)=0$ を満たす $N_2\in\mathcal{B}(D)$ が存在して，$u_{n_k}(x)\to u(x)$, $x\in D\setminus N_2$ $(n_k\to\infty)$ となる．(J.1) により，$N_2\times N_2\setminus\mathsf{diag}$ は測度 $J(x,dy)m(dx)$ の零集合であることがわかる．$\tilde{N}=N_1\cup(N_2\times N_2\setminus\mathsf{diag})$ も測度 $J(x,dy)m(dx)$ の零集合である．よって，$(x,y)\in D\times D\setminus\tilde{N}$ に対して，

$$
\big|\bar{u}(x,y)-\big(u(x)-u(y)\big)\big| = \lim_{n_k\to\infty}\big|\bar{u}_{n_k}(x,y)-\big(u(x)-u(y)\big)\big|
$$

$$\leq \lim_{n_k\to\infty}\left\{|u_{n_k}(x)-u(x)|+|u_{n_k}(y)-u(y)|\right\}=0$$

である．すなわち，$\bar{u}(x,y)=u(x)-u(y),\ J(x,dy)m(dx)$-a.e. である．ゆえに，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u-u_m,u-u_m) &= \iint\limits_{D\times D\setminus\mathsf{diag}} \lim_{n_k\to\infty}\big((u_{n_k}(x)-u_m(x))-(u_{n_k}(y)-u_m(y))\big)^2 J(x,dy)m(dx)\\ &\leq \lim_{n_k\to\infty}\mathcal{E}(u_{n_k}-u_m,u_{n_k}-u_m)\end{aligned}$$

となり，最右辺は m を十分大きくとることでいくらでも小さくできる．よって， $\{u_n\}$ は $\mathcal{E}_1$ に関して u に収束することがわかった．最後に，$u\in C_0^{\mathsf{lip}}(D)$ に対して，

$$\|u\|_{\mathsf{lip}}:=\sup_{x,y\in D,x\neq y}\frac{|u(x)-y(y)|}{|x-y|}\ (<\infty),\ \|u\|_\infty=\sup_{x\in D}|u(x)|$$

とおき，u の台を $K\ (\subset D)$ とすると，(J.1) 及び $u(x)=0,\ x\in D\setminus K$ により

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D\times D\setminus\mathsf{diag}}\big(u(x)-u(y)\big)^2J(x,dy)m(dx) &= \iint\limits_{K\times K\setminus\mathsf{diag}}\big(u(x)-u(y)\big)^2J(x,dy)m(dx)+2\iint\limits_{K\times(D\setminus K)}u(x)^2J(x,dy)m(dx)\\
&\leq \iint\limits_{\substack{K\times K\setminus\mathsf{diag}\\|x-y|<1}}\big(u(x)-u(y)\big)^2J(x,dy)m(dx)+\iint\limits_{\substack{K\times K\\|x-y|\geq 1}}\big(u(x)-u(y)\big)^2J(x,dy)m(dx)\\
&\quad+2\|u\|_\infty^2\int_K\int_{D\setminus K}J(x,dy)m(dx)\\
&\leq \|u\|_{\mathsf{lip}}^2\iint\limits_{\substack{K\times K\setminus\mathsf{diag}\\|x-y|<1}}|x-y|^2J(x,dy)m(dx)+4\|u\|_\infty^2\iint\limits_{\substack{K\times K\\|x-y|\geq 1}}J(x,dy)m(dx)\\
&\quad+2\|u\|_\infty^2\int_K\int_{D\setminus K}J(x,dy)m(dx)\\
&\leq \Big(\|u\|_{\mathsf{lip}}^2\vee 4\|u\|_\infty^2\Big)\int_K\Big(\int\limits_{D,\ y\neq x}\big(1\wedge|x-y|^2\big)J(x,dy)\Big)m(dx)<\infty.\end{aligned}$$

となることから，$C_0^{\mathsf{lip}}(D)\subset\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ がわかる． □

2.3 容量

はじめに，以下で必要となる解析的結果について述べておく．$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(E;m)$ 上の正則な Dirichlet 形式とする．また，$\mathcal{O}$ を E の開集合全体を表す．$A\in\mathcal{O}$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_A &:= \big\{u\in\mathcal{F}:\ u\geq 1\ m\text{-a.e. on }A\big\}\\ \mathrm{Cap}(A) &:= \begin{cases}\inf\mathcal{E}_1(u,u), & \text{if }\mathcal{L}_A\neq\varnothing\\ \infty, & \text{if }\mathcal{L}_A=\varnothing\end{cases}\end{aligned}$$

とおく． さらに，任意の $A\subset E$ に対しては，

$$\mathrm{Cap}(A):=\inf\big\{\mathrm{Cap}(O):\ O\in\mathcal{O},\ A\subset O\big\}$$

とおく．これを A の **1-容量**，あるいは単に**容量**という．

補題 2.6 $\mathcal{O}_0=\big\{A\in\mathcal{O}:\ \mathcal{L}_A\neq\varnothing\big\}$ とおく．$A\in\mathcal{O}_0$ に対して，次を満たす $\mathcal{L}_A$ の元 e_A が一意的に存在する：

$$\mathcal{E}_1(e_A,e_A)=\mathrm{Cap}(A), \tag{2.18}$$

$$0\leq e_A\leq 1\quad m\text{-a.e.},\qquad e_A=1\quad m\text{-a.e. on }A. \tag{2.19}$$

e_A は以下の性質を持つ：

(i) e_A は次の条件を満たす唯一の元である：

$$e_A = 1 \;\; m\text{-a.e. on } A, \qquad \mathcal{E}_1(e_A, v) \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{F} \text{ with } v \geq 0 \; m\text{-a.e. on } A;$$

(ii) $v \in \mathcal{F},\; v = 1 \;\; m\text{-a.e. on } A \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{E}_1(e_A, v) = \mathrm{Cap}(A);$

(iii) $A, B \in \mathcal{O}_0,\; A \subset B \quad \Longrightarrow \quad e_A \leq e_B \; m\text{-a.e.}$

Proof: (i): まず，$\mathcal{L}_A$ は凸集合であることに注意する：

$$u, v \in \mathcal{L}_A,\; 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda u + (1-\lambda)v \in \mathcal{L}_A.$$

これにより，e_A の一意性が出る．実際，u, v を共に $\mathcal{L}_A$ の元で，

$$\mathcal{E}_1(u,u) = \mathcal{E}_1(v,v) = \inf\left\{\mathcal{E}_1(w,w) : w \in \mathcal{L}_A\right\}$$

を満たすとすると，$\mathcal{L}_A$ の凸性により $(u+v)/2 \in \mathcal{L}_A$. よって，

$$\mathcal{E}_1(u,u) = \mathcal{E}_1(v,v) \leq \mathcal{E}_1\Big(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2}\Big) = \frac{1}{4}\mathcal{E}_1(u,u) + \frac{1}{2}\mathcal{E}_1(u,v) + \frac{1}{4}\mathcal{E}_1(v,v)$$

が成り立ち，従って，$\mathcal{E}_1(u,u) = \mathcal{E}_1(v,v) \leq \mathcal{E}_1(u,v)$ が成立することがわかる．また，

$$0 \leq \mathcal{E}_1(u-v, u-v) = \mathcal{E}_1(u,u) - 2\mathcal{E}(u,v) + \mathcal{E}_1(v,v) \leq \mathcal{E}_1(u,u) - 2\mathcal{E}(u,u) + \mathcal{E}_1(u,u) = 0$$

となるから，$u = v$ が出る．

次に，Cap の定義により，$\mathcal{L}_A$ の関数列 $\{u_n\}$ で，$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_1(u_n, u_n) = \mathrm{Cap}(A)$ となるものが存在する．一方，$(u_n + u_m)/2 \in \mathcal{L}_A$ に注意して，中線定理を用いると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathcal{E}_1(u_n,u_n) + \frac{1}{2}\mathcal{E}_1(u_m,u_m) &= \mathcal{E}_1\Big(\frac{u_n - u_m}{2}, \frac{u_n - u_m}{2}\Big) + \mathcal{E}_1\Big(\frac{u_n + u_m}{2}, \frac{u_n + u_m}{2}\Big) \\ &\geq \frac{1}{4}\mathcal{E}_1(u_n - u_m, u_n - u_m) + \mathrm{Cap}(A) \end{aligned}$$

が成り立つ．$\mathcal{L}_A$ は Hilbert 空間 $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_1)$ の閉集合であることから，この両辺において $n, m \to \infty$ とすると，

$$\frac{1}{4}\mathcal{E}_1(u_n - u_m, u_n - u_m) \leq \frac{1}{2}\mathcal{E}_1(u_n,u_n) + \frac{1}{2}\mathcal{E}_1(u_m,u_m) - \mathrm{Cap}(A) \to 0 \;\; (n, m \to \infty)$$

となる．すなわち，$\{u_n\}$ は $\mathcal{E}_1$-Cauchy 列である．よって，$\{u_n\}$ は $\mathcal{L}_A$ の元 e_A に $\mathcal{E}_1$ の位相で収束し，(2.18) が成立する．$v = (0 \vee e_A) \wedge 1$ とおけば $v \in \mathcal{L}_A$ であり，また $\mathcal{E}$ の性質により，

$$\mathrm{Cap}(A) \leq \mathcal{E}(v,v) \leq \mathcal{E}(e_A, e_A) = \mathrm{Cap}(A).$$

よって，$v = e_A$. これは (2.19) を示している．

任意に $v \in \mathcal{F}$ を，$v \geq 0$ m-a.e. on A を満たすようにとる．すると，各 $\varepsilon > 0$ に対して $e_A + \varepsilon v \geq 1$ m-a.e. on A より，$e_A + \varepsilon v \in \mathcal{F}$. よって，

$$\mathcal{E}_1(e_A + \varepsilon v, e_A + \varepsilon v) \geq \mathcal{E}_1(e_A, e_A)$$

が成り立つ．これを整理すると，$\varepsilon^2\mathcal{E}_1(v,v) + 2\varepsilon\mathcal{E}_1(e_A, v) \geq 0$ となり，従って，$\varepsilon\mathcal{E}_1(v,v) + 2\mathcal{E}_1(e_A,v) \geq 0$ が成り立つ．$\varepsilon \downarrow 0$ とすると，(i) が成り立つことがわかる．

逆に $u \in \mathcal{L}_A$ が (i) の条件を満たすとする．すなわち，

$$u = 1 \;\; m\text{-a.e. on } A, \qquad \mathcal{E}_1(u, v) \geq 0, \quad \forall\, v \in \mathcal{F} \;\; \text{with } v \geq 0 \;\; m\text{-a.e on } A$$

とする．いま，任意に $w \in \mathcal{L}_A$ に対して，$v := w - u \geq 0$ m-a.e. on A であるから，

$$\mathcal{E}_1(w,w) = \mathcal{E}_1(u+v, u+v) = \mathcal{E}_1(u,u) + 2\mathcal{E}_1(u,v) + \mathcal{E}_1(v,v) \geq \mathcal{E}_1(u,u)$$

が成り立つ．よって，$u = e_A$ である．

(ii): $v \in \mathcal{F}$ を $v = 1$ m-a.e. on A を満たすとすると，$e_A - v = 0$ m-a.e. on A より，(i) から $\mathcal{E}_1(e_A, e_A - v) \geq 0$ となる．同じく，$v - e_A = 0$ m-a.e. on A から $\mathcal{E}_1(e_A, v - e_A) \geq 0$ が成り立つ．よって，

$$\mathcal{E}_1(e_A, v) = \mathcal{E}_1(e_A, e_A) = \mathrm{Cap}(A).$$

最後に，(iii) を示すために，まず次が成り立つことに注意する：

$$\mathcal{E}_1(u^+, u^-) \leq 0, \quad u \in \mathcal{F}, \quad u^+ := \max\{u, 0\},\ u^- := \max\{-u, 0\}.$$

実際，$u \in \mathcal{F}$ に対して $u^+ = (|u| + u)/2,\ u^- = (|u| - u)/2$ より，$\mathcal{E}$ が正規縮小に関して安定的であることを用いると，

$$\mathcal{E}_1(u^+, u^-) = \mathcal{E}_1\Big(\frac{|u| + u}{2}, \frac{|u| - u}{2}\Big) = \frac{1}{4}\Big(\mathcal{E}_1(|u|, |u|) - \mathcal{E}_1(u, u)\Big) \leq 0.$$

さて，$A, B \in \mathcal{O}_0$ を $A \subset B$ を満たすとする．このとき，

$$e_A - e_A \wedge e_B = \big(e_A - e_B\big)^+ \geq 0$$

となり，また (2.19) より， これは A 上で m-a.e. で 0 となる．さらに，

$$e_B - e_A \wedge e_B = \begin{cases} e_B - e_A, & \text{if } e_A \leq e_B \\ 0, & \text{if } e_A \geq e_B \end{cases} = \begin{cases} -(e_A - e_B), & \text{if } e_A - e_B \leq 0 \\ 0, & \text{if } e_A - e_B \geq 0 \end{cases} = \big(e_A - e_B\big)^-$$

に注意しておく．ところで，$e_A \wedge e_B = 1$ m-a.e. on A であるから，(2.18) 及び (i) を用いると，

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathcal{E}_1\big(e_A - (e_A \wedge e_B), e_A - (e_A \wedge e_B)\big) \\
&= \mathcal{E}_1(e_A, e_A) - \mathcal{E}_1(e_A, e_A \wedge e_B) - \mathcal{E}_1(e_A \wedge e_B, e_A) + \mathcal{E}_1(e_A \wedge e_B, e_A \wedge e_B) \\
&= \mathrm{Cap}(A) - \mathrm{Cap}(A) + \mathcal{E}_1\big(e_A - (e_A \wedge e_B), -(e_A \wedge e_B)\big) \\
&= \mathcal{E}_1\big(e_A - (e_A \wedge e_B), e_B - (e_A \wedge e_B)\big) - \mathcal{E}_1\big(e_B, e_A - (e_A \wedge e_B)\big) \\
&= \mathcal{E}_1\big((e_A - e_B)^+, (e_A - e_B)^-\big) - \mathcal{E}_1\big(e_B, (e_A - e_B)^+\big) \\
&= \mathcal{E}_1\big((e_A - e_B)^+, (e_A - e_B)^-\big) - \mathcal{E}_1\big(e_B, (e_A - e_B)^+\big) \leq 0.
\end{aligned}$$

よって，$e_A = e_A \wedge e_B$ となる． □

補題 2.7 (i) $A, B \in \mathcal{O}_0 \quad A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Cap}(A) \leq \mathrm{Cap}(B)$

(ii) $A, B \in \mathcal{O}_0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Cap}(A \cup B) + \mathrm{Cap}(A \cap B) \leq \mathrm{Cap}(A) + \mathrm{Cap}(B)$

(iii) $A_m \subset B_m,\ A_m, B_m \in \mathcal{O}_0 \quad \Longrightarrow$

$$\mathrm{Cap}\Big(\bigcup_{m=1}^{n} B_m\Big) - \mathrm{Cap}\Big(\bigcup_{m=1}^{n} A_m\Big) \ \leq\ \sum_{m=1}^{n} \Big(\mathrm{Cap}(B_m) - \mathrm{Cap}(A_m)\Big) \tag{2.20}$$

(iv) $\{A_n\} \subset \mathcal{O}_0,\ A_n \subset A_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Cap}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{Cap}(A_n)$

Proof: (i) は $e_B \geq e_A \geq 1$ m-a.e. on A より明らかである．(ii) を示そう． $A, B \in \mathcal{O}_0$ に対して $e_A \vee e_B = 1,$ m-a.e. on $A \cup B,$ $e_A \wedge e_B = 1,$ m-a.e. on $A \cap B$ より，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cap}(A \cup B) + \mathrm{Cap}(A \cap B) &\leq \mathcal{E}_1(e_A \vee e_B, e_A \vee e_B) + \mathcal{E}_1(e_A \wedge e_B, e_A \wedge e_B) \\
&= \frac{1}{4}\mathcal{E}_1\Big(e_A + e_B + |e_A - e_B|, e_A + e_B + |e_A - e_B|\Big) \\
&\quad + \frac{1}{4}\mathcal{E}_1\Big(e_A + e_B - |e_A - e_B|, e_A + e_B - |e_A - e_B|\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\mathcal{E}_1(e_A+e_B, e_A+e_B) + \frac{1}{2}\mathcal{E}_1(|e_A-e_B|, |e_A-e_B|) \\
&\le \mathcal{E}_1(e_A, e_A) + \mathcal{E}_1(e_B, e_B) \;=\; \mathrm{Cap}(A) + \mathrm{Cap}(B).
\end{aligned}
$$

(2.20) は，帰納法によって示そう．そこで，$A_m \subset B_m$，$A_m, B_m \in \mathcal{O}_0$ をとる．$n=2$ のときは，(i)(ii) より，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cap}(B_1\cup B_2) + \mathrm{Cap}(A_1) &\le \mathrm{Cap}\big(B_1\cup(B_2\cup A_1)\big) + \mathrm{Cap}\big(B_1\cap(B_2\cup A_1)\big) \\
&\le \mathrm{Cap}(B_1) + \mathrm{Cap}(B_2\cup A_1)
\end{aligned}
$$

であり，同様に

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cap}(B_2\cup A_1) + \mathrm{Cap}(A_2) &\le \mathrm{Cap}\big(B_2\cup(A_1\cup A_2)\big) + \mathrm{Cap}\big(B_2\cap(A_1\cup A_2)\big) \\
&\le \mathrm{Cap}(B_2) + \mathrm{Cap}(A_1\cup A_2)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これら辺々加えると，

$$
\mathrm{Cap}(B_1\cup B_2) - \mathrm{Cap}(A_1\cup A_2) \le \Big(\mathrm{Cap}(B_1) - \mathrm{Cap}(A_1)\Big) + \Big(\mathrm{Cap}(B_2) - \mathrm{Cap}(A_2)\Big)
$$

となる．よって，$n=2$ について成立することがわかる．$n \ge 2$ に対して，$k=1,2,\ldots,n$ について (2.20) が成立すると仮定すると，$k=n+1$ について，$A' = \bigcup_{k=1}^n A_k, B' = \bigcup_{k=1}^n B_k$ とおくと，$A' \subset B'$，$A', B' \in \mathcal{O}_0$ より，A', B', A_{n+1}, B_{n+1} については，

$$
\mathrm{Cap}(B'\cup B_{n+1}) - \mathrm{Cap}(A'\cup A_{n+1}) \le \Big(\mathrm{Cap}(B') - \mathrm{Cap}(A')\Big) + \Big(\mathrm{Cap}(B_{n+1}) - \mathrm{Cap}(A_{n+1})\Big)
$$

であり，左辺は $\mathrm{Cap}\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\Big) - \mathrm{Cap}\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big)$ であり，右辺第一項に帰納法の仮定を用いると，

$$
\mathrm{Cap}(B') - \mathrm{Cap}(A') = \mathrm{Cap}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) - \mathrm{Cap}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \le \sum_{k=1}^{n}\Big(\mathrm{Cap}(B_k) - \mathrm{Cap}(A_k)\Big)
$$

となる．よって，すべての $n \in \mathbb{N}$ について (2.20) が成立することがわかった．

最後に，任意の n について $A_n \subset A_{n+1} \subset \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ より，(iv) は $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Cap}(A_n) = \sup_n \mathrm{Cap}(A_n) < \infty$ のとき示せば十分であることがわかる．そこで，$\sup_n \mathrm{Cap}(A_n) < \infty$ とする．このとき，各 $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ に対して，補題 2.6(ii) より，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_1(e_{A_n} - e_{A_m}, e_{A_n} - e_{A_m}) &= \mathcal{E}_1(e_{A_n}, e_{A_n}) - 2\mathcal{E}_1(e_{A_m}, e_{A_n}) + \mathcal{E}_1(e_{A_m}, e_{A_m}) \\
&= \mathrm{Cap}(A_n) - 2\mathrm{Cap}(A_m) + \mathrm{Cap}(A_m) \\
&= \mathrm{Cap}(A_n) - \mathrm{Cap}(A_m) \;\longrightarrow\; 0 \; (n, m \to \infty)
\end{aligned}
$$

となることがわかるので，$\{e_{A_n}\}$ は $\mathcal{E}_1$-Cauchy である．ゆえに，適当な $e \in \mathcal{F}$ が存在して，

$$
\mathcal{E}_1(e_{A_n} - e, e_{A_n} - e) \;\to\; 0 \quad (n \to \infty)
$$

となる．また，補題 2.6(iii) により，$e_{A_m} \le e_{A_n}$ m-a.e.，$n > m$ であるから，$e = 1$, m-a.e. on $A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ が成り立つことがわかる．次に，任意に $v \in \mathcal{F}$, $v \ge 0$ m-a.e. on A を取ると，

$$
\mathcal{E}_1(e, v) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_1(e_{A_n}, v) \ge 0
$$

より，再び補題 2.6(i) によって，$e = e_A$ となることがわかる．ゆえに，

$$
\mathrm{Cap}(A) = \mathcal{E}_1(e_A, e_A) \;=\; \lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_1(e_{A_n}, e_{A_n}) \;=\; \lim_{n\to\infty}\mathrm{Cap}(A_n).
$$

$\square$

これまでは，開集合族 $\mathcal{O}$ についてのみ容量を考えてきたが，すべての E の部分集合に対して，次のように拡張することが出来る： $A \subset E$ に対して，

$$\mathrm{Cap}(A) := \inf \left\{ \mathrm{Cap}(O) : \ O \in \mathcal{O}, \ A \subset O \right\} \tag{2.21}$$

すると，Cap は次の意味での Choquet 容量となることがわかる：

定理 2.5 (i) $A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Cap}(A) \le \mathrm{Cap}(B)$

(ii) $A_n \subset A_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Cap}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) = \sup_n \mathrm{Cap}(A_n)$

(iii) $A_n : \mathrm{compact}$，$A_n \supset A_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Cap}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Big) = \inf_n \mathrm{Cap}(A_n)$

Proof: (i) は明らか．(ii) を示すために，$\{A_n\}$ を E の部分集合の集合列で $A_n \subset A_{n+1}$ を満たすとし，$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおく．このとき，各 $n \in \mathbb{N}$ について $A_n \subset A$ であるから，(i) より $\sup_n \mathrm{Cap}(A_n) \le \mathrm{Cap}(A)$ となる．よって，

$$\mathrm{Cap}(A) \le \sup_n \mathrm{Cap}(A_n)$$

を示せば十分である．また $\sup_n \mathrm{Cap}(A_n) = \infty$ ならば明らかだから， 初めから $\sup_n \mathrm{Cap}(A_n) < \infty$ として示せば十分である． $\mathrm{Cap}(A_n)$ の定義から，

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists O_n \in \mathcal{O}_0 \text{ with } A_n \subset O_n \quad \text{s.t.} \quad \mathrm{Cap}(A_n) \le \mathrm{Cap}(O_n) \le \mathrm{Cap}(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{2.22}$$

すると，$A_n \subset A_{n+1}$ を用いると，挟みうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Cap}(O_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Cap}(A_n) = \sup_n \mathrm{Cap}(A_n)$$

となることに注意しておく．また，$m \le n$ に対して，

$$\mathrm{Cap}(A_m) \le \mathrm{Cap}(A_m \cap A_n) \le \mathrm{Cap}(O_m \cap O_n) \le \mathrm{Cap}(O_m) \le \mathrm{Cap}(A_m) + \frac{\varepsilon}{2^m}$$

より，

$$\sum_{m=1}^{n} \Big(\mathrm{Cap}(O_m) - \mathrm{Cap}(O_m \cap O_n) \Big) \le \sum_{m=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^m} < \varepsilon$$

が成立する．よって，補題 2.7(iii) を用いると，

$$\begin{aligned} \mathrm{Cap}\Big(\bigcup_{m=1}^{n} O_m \Big) - \mathrm{Cap}(O_n) &= \mathrm{Cap}\Big(\bigcup_{m=1}^{n} O_m \Big) - \mathrm{Cap}\Big(\bigcup_{m=1}^{n} (O_m \cap O_n) \Big) \\ &\le \sum_{m=1}^{n} \Big(\mathrm{Cap}(O_m) - \mathrm{Cap}(O_m \cap O_n) \Big) < \varepsilon \end{aligned}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Cap}\Big(\bigcup_{m=1}^{n} O_m \Big) \le \lim_{n\to\infty} \mathrm{Cap}(O_n) + \varepsilon$$

が成立する．ところで，$O = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ とおくと，$A \subset O, \ O \in \mathcal{O}$ より，補題 2.7(iv) から

$$\mathrm{Cap}(A) \le \mathrm{Cap}(O) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Cap}(\bigcup_{m=1}^{n} O_m)$$

が成り立つから，(2.22) に注意すると

$$\mathrm{Cap}(A) \leq \mathrm{Cap}(O) \leq \lim_{n\to\infty}\Big(\mathrm{Cap}(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\Big) + \varepsilon = \lim_{n\to\infty}\mathrm{Cap}(A_n) + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だったので $\varepsilon \downarrow 0$ とすることにより (ii) が成り立つことがわかる．

次に，各 n について，A_n をコンパクト集合とし，$A_n \supset A_{n+1}$ を満たすものとする．このとき，(iii) は $\inf_n \mathrm{Cap}(A_n) \leq \mathrm{Cap}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big)$ を，右辺が有限のときに示せば十分である．すると，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists O \in \mathcal{O} \text{ with } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset O \quad \text{s.t.} \quad \mathrm{Cap}(O) \leq \mathrm{Cap}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) + \varepsilon.$$

すると，$A_n \supset A_{n+1}$ より，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subset O$$

に注意すると，ある番号 n_0 が存在して，任意の $n \geq n_0$ について $A_n \subset O$ となる．従って，$\mathrm{Cap}(A_n) \leq \mathrm{Cap}(O)$ がすべての $n \geq n_0$ について成立するので，(iii) が成り立つ． □

定義 2.3 (i) $x \in A,\ A \subset E$ に関する主張に関して，適当な $\mathrm{Cap}(N) =$ を満たすある $N(\subset A)$ が存在して，各 $x \in A \setminus N$ についてその主張が成立するとき，その主張は A **上** q.e. **で成立する**という．

(ii) 開集合 $O \subset E$ に対して，O 上 q.e. で定義された関数 f が O 上**準連続** (quasi-continuous on O) であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，適当な (相対) 開集合 $G \subset O$ が存在して，$\mathrm{Cap}(G) < \varepsilon$ を満たし，f を $O \setminus G$ に制限すると，その上で f が連続関数となるときをいう．特に，$O \setminus G$ を $O \cup \{\Delta\} \setminus G$ に代えたもので成り立つとき，f は**狭い意味で** O 上**準連続** (quasi-continuous in the restricted sense on O) であるという．

(iii) 次の条件を満たす閉集合の集合列 $\{F_n\}$ を E 上の**巣** (nest) という：

$$F_n \subset F_{n+1},\ n = 1, 2, \dots, \quad \mathrm{Cap}(E \setminus F_n) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

(iv) E 上の巣 $\{F_n\}$ が $\boldsymbol{m}$**-正則** (m-regular) であるとは，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\mathrm{supp}[I_{F_k}\, m] = F_k$$

を満たすときをいう．

補題 2.8 $\{F_n\}$ を E 上の巣とする．各 $k \in \mathbb{N}$ に対して，$F'_k := \mathrm{supp}[I_{F_k}\, m]$ とおくと，$\{F'_n\}$ は E 上の m-正則巣となる．

Proof: 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して，$F'_k := \mathrm{supp}[I_{F_k}\, m] = \big\{x \in E : \forall U \in \mathcal{O} \text{ with } x \in U, m(U \cap F_k) > 0\big\}$ とおく．すると，F'_k は閉集合であり，$F'_k \subset F_k$ となる．また，$m(F_k \setminus F'_k) = 0$ となる．実際，

$$G_k = E \setminus F_k, \quad G'_k = E \setminus F'_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

とおくと，

$$G_k \subset G'_k = \big\{x \in E :\ \exists\, O \in \mathcal{O} \text{ with } x \in O \text{ s.t. } m(O \cap F_k) = 0\big\}.$$

ところで，E は可分であるから，稠密な可算部分集合 $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ が存在する．各 x_i に対して，その近傍 $O_i \in \mathcal{O}$ を 1 つとる．ただし，$x_i \in G'_k$ となるときの O_i は $m(O \cap F_k) = 0$ を満たす O とする．すると $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$ である．ここで，$x_i \in G'_k$ となる i 全体を I で表すと，

$$G_k \subset G'_k \subset \bigcup_{i \in I} O_i$$

となることがわかる．すると，測度 m の劣加法性により，

$$m(G'_k - G_k) \le \sum_{i\in I} m(O_i \cap F_k) = 0.$$

次に，

$$\mathcal{L}_{G'_k} = \mathcal{L}_{G_k}$$

であることを示す． $G_k \subset G'_k$ より $\mathcal{L}_{G_k} \supset \mathcal{L}_{G'_k}$ は明らか．そこで，$u \in \mathcal{L}_{G_k}$ をとると，$u \ge 1$ m-a.e. on G_k である．このとき，$A = \{x \in G'_k \backslash G_k :\ u(x) < 1\}$ とおくと，$A \subset G'_k \backslash G_k$ より $m(A) = 0$ である．すなわち，$u(x) \ge 1$ m-a.e. on G'_k である．よって，

$$\mathrm{Cap}(G'_k) = \mathrm{Cap}(G_k) = \mathrm{Cap}(E \setminus F_k) \to 0 \text{ as } k \to \infty$$

となり，$\{F'_k\}$ が E 上の巣であることがわかった．また， $x \in F'_k$ をとると，$x \in O$ を満たす任意の $O \in \mathcal{O}$ に対して，

$$m(O \cap F'_k) \ge m(O \cap F_k) - m(F_k \setminus F'_k) = m(O \cap F_k) > 0$$

より，E 上の巣 $\{F'_k\}$ は m-正則であることがわかる． □

定義 2.4 E 上の巣 $\{F_n\}$ に対して，

$$\begin{aligned} C\big(\{F_n\}\big) \quad &:= \big\{u :\ \text{各 } n \in \mathbb{N} \text{ に対して，} u|_{F_n} \text{ は連続}\big\}, \\ C_\infty\big(\{F_n\}\big) \quad &:= \big\{u :\ \text{各 } n \in \mathbb{N} \text{ に対して，} u|_{F_n \cup \{\Delta\}} \text{ は連続}\big\} \end{aligned}$$

と定める ($f(\Delta) = 0$ であったことに注意する)．すると，明らかに，

$$C_\infty\big(\{F_n\}\big) \subset C\big(\{F_n\}\big), \qquad C_\infty(E) \subset C_\infty\big(\{F_n\}\big), \qquad C(E) \subset C\big(\{F_n\}\big)$$

が成り立つことがわかる．

定理 2.6 (i) S を可算個の E 上の準連続関数の集合とする．または，可算個の狭い意味での E 上の準連続関数の集合とする．このとき，

$$S \subset C\big(\{F_n\}\big) \quad \text{または} \quad S \subset C_\infty\big(\{F_n\}\big)$$

を満たす E 上の m-正則な巣 $\{F_n\}$ が存在する．

(ii) $\{F_n\}$ を E 上の m-正則な巣とする．このとき，$u \in C\big(\{F_n\}\big)$ に対して，

$$u(x) \ge 0 \quad m\text{-a.e.} \quad \Longrightarrow \quad u(x) \ge 0 \quad \text{for} \quad x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

が成り立つ．

Proof: (i) u を準連続関数とする．すると，各 $k \in \mathbb{N}$ に対して，適当な開集合 G_k が存在して，$\mathrm{Cap}(G_k) < 1/k$ かつ $u|_{E\backslash G_k}$ は連続関数となる．$\tilde{F}_k := E \setminus G_k$，$F_n := \bigcup_{k=1}^n \tilde{F}_k$ とおくと，$\{F_n\}$ は E 上の巣であり，かつ $u \in C\big(\{F_n\}\big)$ となる．そこで $S = \{u_1, u_2, u_3, \ldots\}$ とし，各 u_i は準連続関数とする．各 $\ell \in \mathbb{N}$ に対して，次を満たすような E 上の巣 $\{F_k^{(\ell)}\}_k$ が存在する：

$$u_\ell \in C\big(\{F_k^{(\ell)}\}\big), \qquad \mathrm{Cap}(E \setminus F_k^{(\ell)}) < \frac{1}{2^\ell} \cdot \frac{1}{k}.$$

次に，$F_k = \bigcap_{\ell=1}^\infty F_k^{(\ell)}$ とおくと，容量の劣加法性から，

$$\mathrm{Cap}(E \setminus F_k) \le \sum_{\ell=1}^\infty \mathrm{Cap}(E \setminus F_k^{(\ell)}) \le \frac{1}{k}.$$

よって，$\{F_n\}$ は E 上の巣であることがわかる．また， $S \subset C\big(\{F_n\}\big)$ であることがわかる．よって，後は補題 2.8 に沿って正則化を行えばよい．

(ii) ある $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ で $u(x) < 0$ とする．すると，ある k が存在して，$x \in F_k$ となる．また， $u|_{F_k}$ は連続であるから，適当な x の近傍 $O \in \mathcal{O}$ が存在して，

$$u(y) < 0, \quad y \in O \cap F_k$$

である．一方， $\{F_n\}$ は m-正則な巣であるから，$m(O \cap F_k) > 0$ でなければならないが，これは仮定に反する． □

今の定理から，次の系が成り立つ．

系 2.1 関数 u が E 上準連続でかつ $u \geq 0$ m-a.e. が成り立つならば，$u \geq 0$ q.e. となる．

次に，開集合上で定義された準連続関数の性質について述べる．

補題 2.9 $G \subset E$ を開集合とする．このとき，u を G 上の準連続関数とし，$u \geq 0$ m-a.e. on G を満たすならば，$u \geq 0$ q.e. on G が成り立つ．

定義 2.5 与えられた 2 つの関数 u, v があって，u が v の **(狭い意味での) 準連続修正**であるとは，u は E 上の (狭い意味での) 準連続関数であって，$u = v$ m-a.e. が成立するときをいう．

定理 2.7 $u \in \mathcal{F}$ は，狭い意味での準連続修正を持つ．

Proof: まず，次の不等式が成り立つことを見る：

$$\mathrm{Cap}\bigl(\{x \in E : |u(x)| > \lambda\}\bigr) \leq \frac{1}{\lambda^2}\mathcal{E}_1(u,u), \quad \lambda > 0, \ u \in \mathcal{F} \cap C(E). \tag{2.23}$$

任意の $\lambda > 0$, $u \in \mathcal{F} \cap C(E)$ に対して，$G = \{x \in E : \ |u(x)| > \lambda\}$ とおく． $G \in \mathcal{O}$ かつ $|u|/\lambda \in \mathcal{L}_G$ に注意すると，

$$\mathrm{Cap}(G) \leq \frac{1}{\lambda^2}\mathcal{E}_1(|u|,|u|) \leq \frac{1}{\lambda^2}\mathcal{E}_1(u,u)$$

である．次に，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の正則性から，各 $u \in \mathcal{F}$ に対して適当な $u_n \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$ が存在して，

$$\mathcal{E}_1(u_n - u, u_n - u) \to 0 \ \text{ as } n \to \infty$$

を満たす．従って，適当な部分列 $\{n_k\}$ を取り出して，

$$\mathcal{E}_1(u_{n_{k+1}} - u_{n_k}, u_{n_{k+1}} - u_{n_k}) < 2^{-3k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

とすることが出来る．すると，上の不等式により $G_k := \bigl\{x \in E : |u_{n_{k+1}}(x) - u_{n_k}(x)| > 2^{-k}\bigr\}$ とおくと，

$$\mathrm{Cap}(G_k) \leq 2^{2k} \cdot \mathcal{E}_1\bigl(u_{n_{k+1}} - u_{n_k}, u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\bigr) < 2^{-k}$$

が成り立つ．そこで，$F_k := \bigcap_{\ell=k}^{\infty} G_\ell^c$, $k = 1, 2, \ldots$ とおくと $\{F_k\}$ は単調増加な閉集合の集合列で，

$$\mathrm{Cap}(E - F_k) \leq \sum_{\ell=k}^{\infty} \mathrm{Cap}(G_\ell) \leq \sum_{\ell=k}^{\infty} 2^{-\ell} \ \to 0 \text{ as } k \to \infty$$

を満たす．従って，$\{F_k\}$ は E 上の巣となる．また，各 $x \in F_k$ および $N > k$ に対して，$p \geq q > N$ ならば，

$$|u_{n_p}(x) - u_{n_q}(x)| \leq \sum_{\ell=N}^{\infty} |u_{n_{\ell+1}}(x) - u_{n_\ell}(x)| \leq \sum_{\ell=N}^{\infty} 2^{-\ell} \leq 2^{-N+1} \to 0 \quad \text{as } N \to \infty.$$

これは，各 k に対して，$u_{n_\ell}|_{F_k \cup \{\Delta\}}$ が $\ell \to \infty$ とするとき一様収束することを意味している．但し，$u_n \in C_0(E)$ であるから $u_n(\Delta) = 0$ に自然に拡張されている．そこで，

$$\tilde{u}(x) = \lim_{\ell \to \infty} u_{n_\ell}(x), \quad x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$$

とおくと，各 u_n は連続関数であるから，$\tilde{u}$ は連続関数である．しかも $\tilde{u} \in C_\infty\bigl(\{F_k\}\bigr)$ である．また，明らかに $u = \tilde{u}$ m-a.e. である． □

各 $u \in \mathcal{F}$ に対して， $\tilde{u}$ を u の (狭い意味での) 準連続修正とする．このとき，$\widetilde{\mathcal{F}} := \bigl\{\tilde{u} : \ u \in \mathcal{F}\bigr\}$ とおく．

補題 2.10 不等式 (2.23) は，任意の $u \in \widetilde{\mathcal{F}}$ に対しても成立する．

Proof: 任意の $u \in \widetilde{\mathcal{F}}$ を準連続修正とする $\mathcal{F}$ の元を v とする．このとき，$\{u_n\} \subset \mathcal{F} \cap C_0(E)$ で，u_n が v に $\mathcal{E}_1$ に関して収束するものが存在する．定理 2.7 の証明によって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\mathrm{Cap}(G) < \varepsilon$ を満たす適当な開集合 G で，u_n が u に $E \setminus G$ 上一様に収束するようにできる．従って，$\lambda > \varepsilon_1 > 0$ を満たす任意の λ, ε_1 に対して，十分大きい n については

$$\{x \in E:\ |u(x)| > \lambda\} \subset \big\{x \in E:\ |u_n(x)| > \lambda - \varepsilon_1\big\} \cup G$$

が成立することが分かる．すると，容量の単調性と劣加法性，更には (2.23) によって，

$$\mathrm{Cap}\big(\{x \in E:\ |u(x)| > \lambda\}\big) \le \frac{\mathcal{E}_1(u_n, u_n)}{(\lambda - \varepsilon_1)^2} + \varepsilon$$

が成り立つ．したがって，$n \to \infty$ とした後，$\varepsilon_1 \to 0$, そうして $\varepsilon \to 0$ とすることにより，(2.23) が $u \in \mathcal{F}$ に対して成立することが分かる．

□

定理 2.8 (i) $\{u_n\} \subset \widetilde{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{E}_1$-Cauchy 列とすると，適当な部分列 $\{u_{n_k}\}$ 及び $u \in \widetilde{\mathcal{F}}$ が存在して，u_{n_k} が u に q.e. で収束し，$\{u_n\}$ は $\mathcal{E}_1$ に関して収束する．

(ii) $\{u_n\} \subset \mathcal{F}$ を $\mathcal{E}_1$-Cauchy 列とする．u_n の適当な準連続修正 $\tilde{u}_n$ に対して，$\{\tilde{u}_n\}$ がある関数 $\tilde{u}$ に q.e. で収束するならば，$\tilde{u} \in \widetilde{\mathcal{F}}$ であり，かつ $\{u_n\}$ は $\tilde{u}$ に $\mathcal{E}_1$-収束する．

Proof: (ii) は (i) から従うことが分かる．よって，以下 (i) を示す．そこで，$\{u_n\} \subset \tilde{\mathcal{F}}$ かつ $\mathcal{E}_1(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0\ (n, m \to \infty)$ が成り立つと仮定する．このとき，補題 2.10 の不等式によって，定理 2.7 の証明における議論とまったく同様に，適当な部分列 $\{n_\ell\}$ 及び単調減少な開集合の列 $\{O_k\}$ で，$\mathrm{Cap}(O_k) \to 0\ (k \to \infty)$, かつ各 k に対して，$\{u_{n_\ell}\}$ は $E \setminus O_k$ 上一様収束するようにできる．u を極限関数とし，任意の $\varepsilon > 0$ に対して開集合 G_1 を $\mathrm{Cap}(G_1) < \varepsilon/2$, かつ十分大きい k に対して $G_1 \supset O_k$ を満たすようにとる．また，定理 2.6 によって，開集合 G_2 を $\mathrm{Cap}(G_2) < \varepsilon/2$, かつ各 ℓ に対して，u_{n_ℓ} が $E \setminus G_2$ 上で連続関数となるように取ることができる．ここで，$G = G_1 \cup G_2$ とおくと，$\mathrm{Cap}(G) < \varepsilon$ が成り立ち，さらに $\{u_{n_\ell}\}$ は $E \setminus G$ 上で一様に u に収束することがわかる．よって，$u_{n_\ell} \to u$ q.e. となることがわかる．もちろん，明らかに $u \in \tilde{\mathcal{F}}$ であることもわかる．

□

定理 2.9 $B \subset E$ を任意の集合とする．このとき，以下が成り立つ．

(i) $\mathrm{Cap}(B) = \inf_{u \in \mathcal{B}} \mathcal{E}_1(u, u)$. 但し，$\mathcal{L} := \big\{u \in \mathcal{F} : \tilde{u}(x) \ge 1$ q.e. on $B\big\}$ である;

(ii) $\mathcal{L}_B \neq \varnothing$ ならば，次を満たす $\mathcal{L}_B$ の元 e_B が一意的に存在する:

$$\mathrm{Cap}(B) = \mathcal{E}_1(e_B, e_B); \tag{2.24}$$

(iii) $0 \le e_B \le 1$, m-*a.e.* であり，$\widetilde{e}_B = 1$, q.e. on B.

Proof: まず (ii) を示す．補題 2.6 の証明と同様に $\mathcal{L}_B$ は実 Hilbert 空間 $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_1)$ の閉凸集合であることが分かるので，$\mathcal{E}_1(e_B, e_B) \le \mathcal{E}_1(u, u)$, $u \in \mathcal{L}_B$ を満たす $e_B \in \mathcal{F}$ がただ一つ存在することが分かる． 次に，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，適当な開集合 $A \in \mathcal{O}$ で，$B \subset A$, $\mathrm{Cap}(B) > \mathrm{Cap}(A) - \varepsilon$ を満たすものが存在する．補題 2.6 により，$e_A \in \mathcal{L}_B$ がわかるから，$\mathrm{Cap}(A) = \mathcal{E}_1(e_A, e_A) \ge \mathcal{E}_1(e_B, e_B)$ が成立する．よって，

$$\mathrm{Cap}(B) > \mathrm{Cap}(A) - \varepsilon \ge \mathcal{E}_1(e_B, e_B) - \varepsilon$$

となることから，不等式 "$\ge$" が成立する．

逆の不等式を示すために，e_B の準連続修正 $\widetilde{e}_B$ を考える．各 $\varepsilon > 0$ に対して，$\mathrm{Cap}(A_\varepsilon) < \varepsilon$, $\widetilde{e}_B|_{E \setminus A_\varepsilon}$ は連続関数であり，かつ $\widetilde{e}_B \ge 1$ on $B \cap (E \setminus A_\varepsilon)$ が成り立つような開集合 A_ε をとる．また，e_ε を開集合 A_ε に対して補題 2.6 に現れる $\mathcal{L}_{A_\varepsilon}$ の関数とする．

$$G_\varepsilon := \big\{x \in E \setminus A_\varepsilon:\ \widetilde{e}_B > 1 - \varepsilon\big\} \cup A_\varepsilon$$

とおくと G_ε は開集合であり，$B \subset G_\varepsilon$ となる．さらには，$e_B + e_\varepsilon \geq 1 - \varepsilon$, m-a.e. on G_ε を満たす．よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cap}(B) \leq \mathrm{Cap}(G_\varepsilon) &\leq \frac{\mathcal{E}_1(e_B + e_\varepsilon, e_B + e_\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2} \\ &\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \cdot \left(\sqrt{\mathcal{E}_1(e_B, e_B)} + \sqrt{\mathcal{E}_1(e_\varepsilon, e_\varepsilon)}\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \cdot \left(\sqrt{\mathcal{E}_1(e_B, e_B)} + \sqrt{\varepsilon}\right)^2\end{aligned}$$

となることから，$\varepsilon \to 0$ とすることで (2.24) が得られる．

(i) は (ii) の帰結としてすぐわかる．また，(iii) は補題 2.6 と同様に示すことが出来る． □

2.4 エネルギー有限な測度

$(E, \mathcal{B}(E))$ 上の正値 Radon 測度 μ が**エネルギー有限な測度** (measure of finite energy integral) であるとは，適当な $C > 0$ が存在して，

$$\int_E |v(x)|\mu(dx) \leq C\sqrt{\mathcal{E}_1(v,v)}, \quad \forall\, v \in \mathcal{F} \cap C_0(E) \tag{2.25}$$

を満たすときをいう．このとき，Riesz の表現定理を用いると，μ がエネルギー有限な測度であるための必要十分条件は,『任意の $\alpha > 0$ に対して適当な $U_\alpha \mu \in \mathcal{F}$ が存在して，

$$\mathcal{E}_\alpha(U_\alpha \mu, v) = \int_E v(x)\mu(dx), \quad \forall\, v \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$$

が成り立つこと』であることがわかる．$U_\alpha \mu$ を μ に関する α-potential という．

定義 2.6 $\{T_t : t > 0\}$ を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対応する $L^2(E;m)$ 上の Markov 半群とする．このとき，$u \in L^2(E;m)$ が $\{T_t : t > 0\}$ に関して α-**超過関数** (α-excessive function) であるとは,

$$u \geq 0 \quad m\text{-a.e.}, \quad e^{-\alpha t} T_t u \leq u \quad m\text{-a.e. for } \forall\, t > 0 \tag{2.26}$$

が成り立つときをいう,

定理 2.10 $u \in \mathcal{F}$, $\alpha > 0$ に対して，以下の条件はすべて同値である：

(i) u は適当な測度に関する α-potential 関数；

(ii) u は α-超過関数；

(iii) $u \geq 0 \;\; m$-a.e., $\;\; \beta G_{\alpha+\beta} u \leq u \;\; m$-a.e. $\;$ for $\; \forall\, \beta > 0$；

(iv) $\mathcal{E}_\alpha(u,v) \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{F}$ with $v \geq 0$ m-a.e.；

(v) $\mathcal{E}_\alpha(u,v) \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$ with $v \geq 0$.

Proof: “(ii)⇒(iii)” は関係式：$G_\beta u = \int_0^\infty e^{-\beta t} T_t u dt$ により分かる．実際，u を α-超過関数とすると，

$$G_{\alpha+\beta} u = \int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)t} T_t u dt \leq \int_0^\infty e^{-\beta t} u dt = \frac{1}{\beta} u, \quad m\text{−a.e.}$$

より (iii) がわかる．次に (iii) を仮定する．このとき，近似形式 $\mathcal{E}^{(\beta)}(u,v) := \beta(u - \beta G_\beta u, v)$, $u, v \in L^2(E;m)$ において，$\alpha > 0$ に対し

$$\mathcal{E}_\alpha^{(\beta)}(u,v) := \beta(u - \beta G_{\alpha+\beta} u, v), \quad u, v \in L^2(E;m)$$

とおくと，Resolvent 方程式と G_α の強連続性から，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\alpha^{(\beta)}(u,v)-\mathcal{E}^{(\beta)}(u,v) &= \beta(u-\beta G_{\alpha+\beta}u,v)-\beta(u-\beta G_\beta u,v)\\ &= \beta^2\alpha(G_{\alpha+\beta}G_\beta u,v)\\ &= \alpha(\beta G_{\alpha+\beta}u,\beta G_\beta v)\ \to\ \alpha(u,v) \quad \text{as } \beta\to\infty,\end{aligned}$$

すなわち，

$$\lim_{\beta\to\infty}\Big(\mathcal{E}_\alpha^{(\beta)}(u,v)-\mathcal{E}^{(\beta)}(u,v)\Big)=\alpha(u,v)$$

となる．また，近似形式の性質：$\lim_{\beta\to\infty}\mathcal{E}^{(\beta)}(u,v)=\mathcal{E}(u,v)$ より，

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to\infty}\mathcal{E}_\alpha^{(\beta)}(u,v) &= \lim_{\beta\to\infty}\Big(\mathcal{E}_\alpha^{(\beta)}(u,v)-\mathcal{E}^{(\beta)}(u,v)\Big)+\lim_{\beta\to\infty}\mathcal{E}^{(\beta)}(u,v)\\ &= \alpha(u,v)+\mathcal{E}(u,v)\ =\ \mathcal{E}_\alpha(u,v).\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，

$$\mathcal{E}_\alpha(u,v)=\lim_{\beta\to\infty}\beta(u-\beta G_{\beta+\alpha}u,v).$$

ところで，(iii) の仮定から，$\beta G_{\beta+\alpha}u\le u$ m-a.e. であるから，$v\in\mathcal{F},\ v\ge 0$ である限り，

$$\forall\,\beta>0,\quad \beta(u-\beta G_{\beta+\alpha}u,v)\ge 0,$$

従って，(iv) が成立することがわかる．

(iv) を仮定する．すると，u は，閉凸集合

$$\mathcal{L}_u:=\{w\in\mathcal{F}:\ w\ge u\ \ m\text{-a.e.}\}$$

において，汎関数 $w\mapsto\mathcal{E}_\alpha(w,w)$ を最小にする唯一の元となることがわかる．これは，補題 2.6 における平衡ポテンシャルの存在性を示すやり方と全く同じようにできる．ところで，$u\le|u|$ m-a.e. より，$|u|\in\mathcal{L}_u$. よって，$\mathcal{E}_\alpha(u,u)\le\mathcal{E}_\alpha(|u|,|u|)$ が成り立つが，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が Markov 的であることから，$\mathcal{E}_\alpha(u,u)=\mathcal{E}_\alpha(|u|,|u|)$ となる．よって，u の存在の一意性により，$u=|u|\ge 0$ となる． また，

$$G_\alpha v-e^{-\alpha t}G_\alpha T_t v=\int_0^t e^{-\alpha s}T_s v ds\ge 0,\quad v\in\mathcal{F}\ \ \text{with}\ \ v\ge 0$$

に注意すると，仮定から

$$(u-e^{-\alpha t}T_t u,v)=(u,v-e^{-\alpha t}T_t v)=\mathcal{E}_\alpha\big(u,G_\alpha(v-e^{-\alpha t}T_t v)\big)\ge 0,\quad v\in\mathcal{F}\ \ \text{with}\ \ v\ge 0$$

となる．よって，u は α-超過関数であることがわかる．すなわち，(ii) が示された．“(iv)⇒(v)”は明らか．“(i)⇒(v)”も明らかである．

(v) を仮定する．Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は正則であるから，任意の $v\in\mathcal{F}$ に対して，適当な関数列 $\{v_n\}\subset\mathcal{F}\cap C_0(E)$ が存在して，$\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_1(v_n-v,v_n-v)=0$ と出来る．

次に，$\phi(t)=(|t|+t)/2,\ t\in\mathbb{R}$ とおくと，$\phi(0)=0,\ \big|\phi(t)-\phi(s)\big|\le|t-s|,\ t,s\in\mathbb{R}$ が成り立つ．すなわち，ϕ は正規縮小である．よって，再び $(\mathcal{E}.\mathcal{F})$ が Markov 的であることを用いて $\phi(v_n)\in\mathcal{F}\cap C_0(E)$ がわかる．さらに，

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_1\big(\phi(v_n)-\phi(v),\phi(v_n)-\phi(v)\big)=0$$

となる．ところで，任意の $v\in\mathcal{F}$ with $v\ge 0$ に対して，$\phi(v)=v,\ \phi(v_n)=v_n^+\ge 0$ より，

$$\mathcal{E}_\alpha(u,v)=\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_\alpha(u,v_n^+)\ge 0$$

となる．これは，“(v)⇒(iv)”が云えたことになる．

再び (v) を仮定する．

$$I(v) := \mathcal{E}_\alpha(u,v), \quad v \in \mathcal{F} \cap C_0(X)$$

とおく．すると，

$$v \in \mathcal{F} \cap C_0(E),\ v \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad I(v) = \mathcal{E}_\alpha(u,v) \geq 0$$

及び，各 $v_1, v_2 \in \mathcal{F} \cap C_0(E),\ a, b \in \mathbb{R}$ に対して，

$$I(av_1 + bv_2) = \mathcal{E}_\alpha(u, av_1 + bv_2) = a_1 I(v_1) + bI(v_2)$$

が成立する．すなわち，$I : \mathcal{F} \cap C_0(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ は正値線形汎関数である．

次に，$K \subset E$ を任意のコンパクト集合とし，v_K を次のようにとる：

$$v_K \in \mathcal{F} \cap C_0(E),\ v_K \geq 1 \text{ on } K.$$

このとき，台が K に含まれる任意の $v \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$ に対して，

$$\left|I(v)\right| \leq \|v\|_\infty I(v_K)$$

が成り立つ．更に，正則性及び補題 2.5 から，任意の $w \in C_0(E)$ は $\mathrm{supp}[w] \supset \mathrm{supp}[v_n]$) $(n \in \mathbb{N})$ を満たす関数列 $v_n \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$ によって一様近似出来る．すなわち，I は $C_0(E)$ 上の正値線形汎関数に拡張できる． よって，適当な正値 Radon 測度 μ が存在して，

$$I(v) = \int_E v(x)\mu(dx), \quad v \in C_0(E)$$

を満たす．特に，

$$I(v) = \mathcal{E}_\alpha(u,v) = \int_E v(x)\mu(dx), \quad v \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$$

であることから， μ はエネルギー有限な測度，従って u は測度 μ に関する α-potential 関数となっていることがわかる．よって，(i) が示された．

系 2.2 $u_1, u_2 \in \mathcal{F}$ がともに α-potential 関数であれば，$u_1 \wedge u_2$ 及び $u_1 \wedge 1$ もそうである．

Proof: 各 $i = 1, 2$ に対して，$0 \leq u_1 \wedge u_2 \leq u_i,\ m$-a.e. であり，$0 \leq u_1 \wedge 1 \leq u_1,\ m$-a.e. である．また，$u_i$ が α-potential であることから $e^{-\alpha t} T_t u_i \leq u_i,\ m$-a.e. が各 $t > 0$ について成立する．よって，T_t の positivity preserving の性質により，

$$e^{-\alpha t} T_t(u_1 \wedge u_2) \leq e^{-\alpha t} T_t u_i \leq u_i, \quad e^{-\alpha t} T_t(u_1 \wedge 1) \leq e^{-\alpha t} T_t u_1 \leq u_1$$

が成り立つことがわかる．よって，$u_1 \wedge u_2$ 及び $u_1 \wedge 1$ はともに α-potential であることがわかる． □

以下，$\mathcal{S}_0$ を E 上のエネルギー有限な正値 Radon 測度全体を表すものとする．

補題 2.11 $\mu \in \mathcal{S}_0,\ \alpha > 0$ とする．このとき，

$$g_n(x) := n\big(U_\alpha \mu(x) - nG_{n+\alpha}(U_\alpha \mu)(x)\big),\ x \in E,\ n = 1, 2, \ldots$$

とおくと，$g_n \cdot m$ は μ に**漠収束** (converges vaguely) し，$G_\alpha g_n$ は $U_\alpha \mu$ に $\mathcal{E}_\alpha$-弱収束する． ここで，E 上の Radon 測度の列 ν_n が同じく E 上の Radon 測度 ν に**漠収束**とするとは，任意の $f \in C_0(E)$ に対して，

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f(x)\nu_n(dx) = \int_E f(x)\nu(dx) \tag{2.27}$$

が成り立つことをいう．

Proof: μ がエネルギー有限な測度であるから，$u = U_\alpha \mu$ とおく．定理 2.10 により，u は α-excessive であることから，$g_n \geq 0$, m-a.e. がわかる．更に，Resolvent 方程式及び，補題 1.4 より

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\alpha(G_\alpha g_n, v) &= (g_n, v) = n(u - nG_{n+\alpha}u, v) = n\mathcal{E}_\alpha(G_\alpha(u - nG_{n+\alpha}u), v)\\ &= n\mathcal{E}_\alpha(G_{n+\alpha}u, v) = \frac{n}{n+\alpha}\mathcal{E}_\alpha\big((n+\alpha)G_{n+\alpha}u, v\big) \to \mathcal{E}_\alpha(u, v) \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

となる．特に $(g_n, v) \to \int_E v(x)\mu(dx)$ $(n \to \infty)$ が任意の $v \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$ に対して成立する． □

補題 2.12 任意の $\mu \in \mathcal{S}_0$ に対して，μ は容量 0 の集合に charge しない，すなわち，$A \in \mathcal{B}(E)$ に対して，$\mathrm{Cap}(A) = 0$ ならば $\mu(A) = 0$ となる．

Proof: 任意の $\mu \in \mathcal{S}_0$ に対して，

$$\mu(G) \leq \sqrt{\mathcal{E}_1(U_1\mu, U_1\mu)}\sqrt{\mathrm{Cap}(G)}, \quad G \in \mathcal{O}_0$$

を示す．これが示されれば明らかに証明は終了することがわかる．これは，先の補題を $\alpha = 1$ として適用することで示される．実際，

$$\begin{aligned}\mu(G) &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_G g_n(x)m(dx) \leq \liminf_{n\to\infty}(g_n, e_G)\\ &\leq \sqrt{\mathcal{E}_1(U_1\mu, U_1\mu)} \cdot \sqrt{\mathcal{E}_1(e_G, e_G)}\end{aligned}$$

であり，右辺の第二項は $\mathrm{Cap}(G)$ に等しい． □

定理 2.11 任意の $\mu \in \mathcal{S}_0$ に対して，

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{F}} \subset L^1(E;\mu), \\ \mathcal{E}_\alpha(U_\alpha\mu, v) = \displaystyle\int_E \tilde{v}(x)\mu(dx), \quad \alpha > 0,\ v \in \mathcal{F}. \end{cases}$$

ここで，$\tilde{v}$ は $v \in \mathcal{F}$ の (狭い意味の) 準連続修正であり，$\tilde{\mathcal{F}}$ はそのような $\tilde{v}$ 全体を表す．

Proof: $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の正則性によって，各 $v \in \mathcal{F}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_1(v_n - v, v_n - v) = 0$ を満たす $v_n \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$ が存在する．このとき，定理 2.8 より，適当な部分列 $\{v_{n_k}\} \subset \{v_n\}$ が存在して，v_{n_k} は E 上 q.e. で $\tilde{v}$ に収束することがわかる．一方，μ はエネルギー有限な測度であるから，(2.25) が各 v_n について成立する．よって，補題 2.12 と Fatou の補題により，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\begin{aligned}\int_E \big|\tilde{v}(x) - v_n(x)\big|\mu(dx) &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_E \big|v_{n_k}(x) - v_n(x)\big|\mu(dx)\\ &\leq C \cdot \liminf_{k\to\infty} \sqrt{\mathcal{E}_1(v_{n_k} - v_n, v_{n_k} - v_n)}\end{aligned}$$

が成り立つ．これにより，$\tilde{v} \in L^1(E;\mu)$ であること，及び $\{v_n\}$ が $\tilde{v}$ に $L^1(E;\mu)$-収束することがわかる．また，各 $n \in \mathbb{N}$ について

$$\mathcal{E}_\alpha(U_\alpha\mu, v_n) = \int_E v_n(x)\mu(dx)$$

であることから，両辺 $n \to \infty$ とすると，

$$\mathcal{E}_\alpha(U_\alpha\mu, v) = \int_E \tilde{v}(x)\mu(dx)$$

が成立する． □

$\mu \in \mathcal{S}_0$ に対して，

$$\mathcal{E}_\alpha(\mu) := \mathcal{E}_\alpha(U_\alpha\mu, U_\alpha\mu) \tag{2.28}$$

とき，**μ の α-エネルギー積分** (α-energy integral of μ) とよぶ．

補題 2.13 $\mu, \nu \in \mathcal{S}_0$ 及び $\alpha > 0$ に対して，$u_1 = U_\alpha \mu,\ u_2 = U_\alpha \nu$ とおく．このとき，

(i) もし $\widetilde{u}_1 \leq \widetilde{u}_2$ μ-a.e. が成り立つならば，$u_1 \leq u_2$ m-a.e. を満たす.

(ii) 適当な $C > 0$ に対して，$\widetilde{u}_1 \leq C$ μ-a.e. を満たすならば，$u_1 \leq C$ m-a.e. が成り立つ.

Proof: (i): $u = u_1 \wedge u_2$ とおくと，$\tilde{u} = \tilde{u}_1$ μ-a.e. であり，また 系 2.2 より，u は α-potential であるから，

$$\mathcal{E}_\alpha(u_1, u) = \int_E \tilde{u}(x)\mu(dx) = \int_E \tilde{u}_1(x)\mu(dx) = \mathcal{E}_\alpha(u_1, u_1)$$

である．また， $u \leq u_1$ m-a.e. であり，かつ

$$\mathcal{E}_\alpha(u - u_1, u - u_1) = -\mathcal{E}_\alpha(u, u_1 - u) - \mathcal{E}_\alpha(u_1, u - u_1) = -\mathcal{E}_\alpha(u, u_1 - u) \leq 0$$

となるので，$u_1 = u = u_1 \wedge u_2 \leq u_2$ m-a.e. となる．

(ii): $u_2 = u_1 \wedge C$ とおくと $\tilde{u}_2 = \tilde{u}_1$ μ-a.e. であり，u_2 は α-potential だから，(i) の証明と同様に

$$\mathcal{E}_\alpha(u_1, u_2) = \int_E \tilde{u}_2(x)\mu(dx) = \int_E \tilde{u}_1(x)\mu(dx) = \mathcal{E}_\alpha(u_1, u_1)$$

となる．よって，$u_2 \leq u_1$ m-a.e. から

$$\mathcal{E}_\alpha(u_2 - u_1, u_2 - u_1) = -\mathcal{E}_\alpha(u_2, u_1 - u_2) - \mathcal{E}_\alpha(u_1, u_2 - u_1) = -\mathcal{E}_\alpha(u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$

となり，$u_1 = u_2 \leq C$ m-a.e. がわかる． □

次の，$\mathcal{S}_0$ の部分集合 $\mathcal{S}_{00}$ を導入しよう：

$$\mathcal{S}_{00} := \Big\{\mu \in \mathcal{S}_0 :\ \mu(E) < \infty, \quad \|U_1\mu\|_\infty < \infty\Big\} \tag{2.29}$$

但し，$\|\cdot\|_\infty$ は L^∞-norm を表す． 補題 2.13 は次の補題を導く：

補題 2.14 各 $\mu \in \mathcal{S}_0$ に対して，適当なコンパクト集合の増大列 $\{F_n\}$ が存在して，

$$1_{F_n} \cdot \mu \in \mathcal{S}_{00}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\mathrm{Cap}(K \setminus F_n) \to 0, \quad n \to \infty, \quad \text{for any compact set } K$$

を満たす.

Proof: 各 $\mu \in \mathcal{S}_0$ に対して，$U_1\mu \in \mathcal{F}$ の準連続修正 $\widetilde{U_1\mu}$ をとり，$S = \{\widetilde{U_1\mu}\}$ として定理 2.6 における巣 $\{F_n^0\}$ を考える．また，相対コンパクトな開集合の増大列 $\{E_n\}$ で，$\overline{E}_n \subset E_{n+1}$, $E_n \uparrow E$ を満たすものをとる．このとき，

$$F_n = \big\{x \in F_n^0 \cap \overline{E}_n :\ \widetilde{U_1\mu}(x) \leq n\big\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

とおくと，$\{F_n\}$ はコンパクト集合の増大列である．また，任意のコンパクト集合 K に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Cap}(K \setminus F_n) \leq \lim_{n\to\infty} \Big(\mathrm{Cap}(E \setminus F_n) + \mathrm{Cap}\big(\{\widetilde{U_1\mu} > n\}\big)\Big)$$

となるが，右辺は 0 となることが定理 2.7 の証明における不等式 (チェビシェフ型不等式) を用いることにより分かる．

次に，$\widetilde{U_1}(1_{F_n} \cdot \mu) \leq \widetilde{U_1\mu} \leq n$, q.e. on F_n が成り立つから，$U_1(1_{F_n} \cdot \mu) \leq n$ m-a.e. が先の補題を用いると分かる． □

補題 2.15 任意の $u \in \mathcal{F}$ および閉集合 F に対して，以下の条件はすべて同値：

(i) 適当な $\mu \in \mathcal{S}_0$ が存在して，$u = U_\alpha\mu$, $\mathrm{supp}[\mu] \subset F$ を満たす.

(ii) $\mathcal{E}_\alpha(u,v) \geq 0,\ \forall v \in \mathcal{F}$ with $\tilde{v} \geq 0$ q.e. on F.

(iii) $\mathcal{E}_\alpha(u,v) \geq 0,\ \forall v \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$ with $v \geq 0$ on F.

Proof: (i)⇒(ii) は定理 2.11 を使うことにより示される．(ii)⇒(iii) は明らか．(iii)⇒(i) における測度の構成は定理 2.10 により出てくる．ところで，$w \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$ で，$\mathrm{supp}[w] \subset F^c$ を満たすものを任意に取ると，$\pm w \geq 0$ on F である (実際は F 上 0 であるが)．よって，(iii) から

$$0 \leq \mathcal{E}_\alpha(u, \pm w) = \pm \int_E w(x)\mu(dx) = \pm \int_{F^c} w(x)\mu(dx).$$

よって，$\mathrm{supp}[\mu] \subset F$ がわかった． □

定理 2.12 任意 Borel 集合 $B \subset E$ に対して，以下の条件はすべて同値である：

(i) $\mathrm{Cap}(B) = 0$;

(ii) $\mu(B) = 0,\ \forall \mu \in \mathcal{S}_0$;

(iii) $\mu(B) = 0,\ \forall \mu \in \mathcal{S}_{00}$;

Proof: (i)⇒(ii) は補題 2.12 より明らかである．(iii)⇒(ii) も補題 2.14 より分かる．実際，各 n について $\mu(F_n \cap B) = 0$ となるから，$\mu\Big(B \cap \Big(\bigcup_{n=1}^\infty F_n\Big)\Big) = 0$ となる．一方，補題 2.14 の 2 番目の主張により，任意のコンパクト集合 K に対して，$\mathrm{Cap}\Big(K \setminus \bigcup_{n=1}^\infty F_n\Big) = 0$ であることから，補題 2.12 によって $\mu\Big(K \setminus \bigcup_{n=1}^\infty F_n\Big) = 0$ となる．K は任意だったから，$\mu\Big(E \setminus \bigcup_{n=1}^\infty F_n\Big) = 0$. ゆえに，$\mu(B) = 0$ が出てくる．

最後に B を Borel 集合で $\mathrm{Cap}(B) > 0$ を仮定する．すると，適当なコンパクト集合 $K \subset B$ で $\mathrm{Cap}(K) > 0$ となるものが存在する．このとき，補題 2.15 及び定理 2.11 によって，任意のコンパクト集合 $F \subset E$ に対して $e_F = U_1(\nu_F),\ \mathrm{supp}[\nu_F] \subset F$ を満たす $\nu_F \in \mathcal{S}_0$ が存在して，

$$\mathrm{Cap}(F) = \mathcal{E}_1(e_F, e_F) = \int_E \tilde{e}_F d\nu_F = \nu_F(F)$$

を満たすことが分かる．そこで，$F = K$ とおくと，$\nu_K(B) = \mu_K(K) = \mathrm{Cap}(K) > 0$ となる．このことから，(ii)⇒(i) が示された． □

ここで，$\mathcal{S}_0$ より広い測度のクラス，**滑らかな測度**のクラス $\mathcal{S}$ について考える．$(E, \mathcal{B}(E))$ 上の非負値 Borel 測度 μ が**滑らか** (smooth) であるとは，次の条件を満たすときをいう：

(S.1) μ は容量 0 の集合には charge しない．

(S.2) 適当な閉集合の増加列 $\{F_n\}$ が存在して，

$$\mu(F_n) < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.30}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Cap}(K \setminus F_n) = 0 \quad \text{for any compact set } K. \tag{2.31}$$

このとき，

$$\mu\Big(E \setminus \bigcup_{n=1}^\infty F_n\Big) = 0 \tag{2.32}$$

を満たすことに注意しておく．

単調増加な閉集合の集合列 $\{F_n\}$ が**一般化された巣** (generalized nest) であるとは，条件 (2.31) を満たすときをいい，**巣** (nest) と区別しておく．一般化された巣において，各 F_n がコンパクト集合であるとき，**一般化されたコンパ**

クト巣 (generalized compact nest) と呼ぶ． 滑らかな測度 μ に対して，(2.30),(2.31) を満たす $\{F_n\}$ を，**$\boldsymbol{\mu}$ に対応する巣** (nest associated with μ) と呼ぶ．

$\mathcal{S}$ はきわめて広いクラスの測度の集合をなし，特に容量 0 の集合に charge しない Radon 測度全体を含んでいることが分かる．特に $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ となることが分かる．

補題 2.16 ν を $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の有界な非負値 Borel 測度とする．このとき，適当な $C > 0$ が存在して，

$$\nu(A) \le C \cdot \mathrm{Cap}(A), \quad \forall\, A \in \mathcal{B}(E)$$

となるならば，$\nu \in \mathcal{S}_0$ となる．

Proof: $\mathcal{E}_1(v,v) = 1$ を満たす任意の非負値の $v \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$ について，Chebychev 型の不等式から

$$\begin{aligned}
\int_E v(x)\nu(dx) &\le \nu(E) + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+1} \nu\big(\{x \in E:\ 2^k \le v(x) < 2^{k+1}\}\big) \\
&\le \nu(E) + C\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+1} \mathrm{Cap}\big(\{v \ge 2^k\}\big) \\
&\le \nu(E) + C\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+1} \cdot 2^{-2k} \mathcal{E}_1(v,v) \ = \ \nu(E) + 4C
\end{aligned}$$

となり，$\nu \in \mathcal{S}_0$ であることがわかる． □

補題 2.17 ν を有界な非負値 Borel 測度で，容量 0 の集合に charge しないものとする．このとき，適当な単調非増加な開集合列 $\{G_n\}$ が存在して，

$$\mathrm{Cap}(G_n) \to 0, \quad \nu(G_n) \to 0, \quad n \to \infty,$$

$$\nu(A) \le 2^n \mathrm{Cap}(A) \quad \text{for any Borel set } A \subset E \setminus G_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

が成立する．

Proof: 任意の $n \in \mathbb{N}$ を取り，それを固定する．このとき，$\alpha_n := \inf\limits_{A \in \mathcal{B}(E)} \Big\{ 2^n \mathrm{Cap}(A) - \nu(A) \Big\} \, (\le 0)$ とおくと，

$$-\nu(E) \le -\nu(A) \le 2^n \mathrm{Cap}(A) - \nu(A), \quad A \in \mathcal{B}(E)$$

より，$-\nu(E) \le \alpha_n$ であることがわかる．$\alpha_n < 0$ ならば，開集合 $B_1^n \subset E$ で $2^n \mathrm{Cap}(B_1^n) - \nu(B_1^n) < \alpha_n/2 \,(< 0)$ を満たすものが存在する．$\alpha_n = 0$ のときは $B_1^n = E$ と定める．以下，$\alpha_n < 0$ として考える．このとき，

$$\alpha_{n,1} := \inf \Big\{ 2^n \mathrm{Cap}(A) - \nu(A):\ A \in \mathcal{B}(E),\ A \subset E \setminus B_1^n \Big\} \, (\le 0)$$

とおくと，B_1^n の作り方から，$\alpha_{n,1} \ge \alpha_n/2$ である． 実際，任意の $A \in \mathcal{B}(E),\ A \subset E \setminus B_1^n$ に対して，$A \cap B_1^n = \varnothing$ より，

$$\begin{aligned}
\alpha_n &\le 2^n \mathrm{Cap}(A \cup B_1^n) - \nu(A \cup B_1^n) \\
&\le \Big\{ 2^n \mathrm{Cap}(A) - \nu(A) \Big\} + \Big\{ 2^n \mathrm{Cap}(B_1^n) - \nu(B_1^n) \Big\} \ < 2^n \mathrm{Cap}(A) - \nu(A) + \frac{\alpha_n}{2}
\end{aligned}$$

が成り立つことから，最右辺の $\alpha_n/2$ を左辺に移項して $A \subset E \setminus B_1^n$ に関する下限をとれば $\alpha_{n,1} \ge \alpha_n/2$ が成り立つことがわかる．$\alpha_{n,1} < 0$ ならば，相対開集合 $B_2^n \subset E \setminus B_1^n$ を，$2^n \mathrm{Cap}(B_2^n) - \nu(B_2^n) \ge \alpha_{n,1}/2 \ge \alpha_n/2^2$ を満たすようにとる．$\alpha_{n,1} = 0$ ならば，$B_2^n = E \setminus B_1^n$ と定める．以下，同様の操作を繰り返すことによって，開集合列 $\{B_1^n \cup B_2^n \cup \cdots \cup B_k^n\}_{k=0}^{\infty}$ と単調増加な実数列 $\{\alpha_{n,k}\}_{k=0}^{\infty}$ で，

$$\alpha_{n,k} := \inf \Big\{ 2^n \mathrm{Cap}(A) - \nu(A):\ A \in \mathcal{B}(E),\ A \subset E \setminus \big(B_1^n \cup B_2^n \cdots \cup B_{k-1}^n \big) \Big\} \, (\le 0)$$

として,

$$2^n\mathrm{Cap}(B_1^n\cup B_2^n\cup\cdots\cup B_k^n)-\nu(B_1^n\cup B_2^n\cup\cdots\cup B_k^n)\le 0,$$

$$2^n\mathrm{Cap}(A)-\nu(A)\ge a_{n,k+1}\ge\frac{a_{n,k}}{2}\ge\frac{\alpha_n}{2^{k+1}},\ A\subset E\setminus\left(B_1^n\cup B_2^n\cup\cdots\cup B_k^n\right)$$

を満たすものが構成できる．ただし，$\alpha_{n,0}=\alpha_n$ と定め，ある番号 k_0 で $\alpha_{n,k_0}=0$ ならば $\alpha_{n,k}=0$ $(k\ge k_0)$ とおく．この場合 $B_1^n\cup B_2^n\cup\cdots\cup B_k^n=E$ $(k\ge k_0)$ とする．

このとき，$G_n'=\bigcup_{k=1}^\infty B_k^n$ とおく．すると，$2^n\mathrm{Cap}(A)\ge\nu(A),\ A\subset E\setminus G_n'$ が成立する．更に，$2^n\mathrm{Cap}(G_n')\le\nu(G_n')<\infty$ である．よって，$G_n=\bigcup_{m=n}^\infty G_m'$ とおくと，これが求めるものである．実際，$\{G_n\}$ は単調減少な減少列であり，$\mathrm{Cap}(G_n)\le 2^{-n+1}\nu(E)\to 0$ $(n\to\infty)$ となる．また，ν は容量 0 の集合に charge しないことから，$0=\nu(\bigcap_n G_n)=\lim_{n\to\infty}\nu(G_n)$. □

定理 2.13 ν を $(E,\mathcal{B}(E))$ 上非負値 Borel 測度とするとき，次の条件はすべて同値である．

(i) $\nu\in\mathcal{S}$;

(ii) 適当な，一般化された巣 $\{F_n\}$ が存在して，(2.32) 及び各 $n\in\mathbb{N}$ について，$1_{F_n}\cdot\nu\in\mathcal{S}_0$ を満たす.

(iii) 適当な一般化されたコンパクトな巣 $\{F_n\}$ が存在して，(2.32) 及び各 $n\in\mathbb{N}$ について，$1_{F_n}\cdot\nu\in\mathcal{S}_{00}$ を満たす.

Proof: (iii)⇒(i) は明らか．(ii)⇒(i) は先に述べた 2 つの補題から従う．実際，ν が容量 0 の集合に charge しない，有界な Borel 測度とすると，2 つめの補題の $\{G_n\}$ に対して，$F_n=G_n^c$ とおくと $1_{F_n}\cdot\nu$ は 1 つめの補題の条件を満たすことがわかるから (i) が従う． ν が一般の Borel 測度であるならば，$\{F_n\}$ を条件 (2.30) (2.31) を満たす一般化された巣とし，$\mu_\ell:=1_{F_\ell}\nu$ とおくと，μ_ℓ は有界な Borel 測度であるから，2 つ目の補題の条件を満たす単調非増加な開集合列 $\{G_n^\ell\}$ が存在する．$E_n:=\bigcup_{\ell=1}^n\left(F_\ell\cap(G_n^\ell)^c\right)$ とおくと，$\{E_n\}$ は単調増加な閉集合列であり，各 n について $1_{E_n}\cdot\nu\in\mathcal{S}_0$ であることもわかる．また，任意のコンパクト集合 K に対して，$K\setminus E_n\subset\left(K\setminus F_\ell\right)\cup\left(K\setminus(G_n^\ell)^c\right)$ より， (2.31) が成り立つこともわかる．

(ii)⇒(iii) は補題 2.13 より従うことがわかる． □

2.5 被約関数とスペクトル統合

$\alpha>0$ を固定する．α-potential $f\in\mathcal{F}$ 及び $B\subset E$ に対して,

$$\mathcal{L}_{f,B}:=\left\{w\in\mathcal{F}:\ \widetilde{w}\ge\widetilde{f}\text{ q.e. on }B\right\}$$

とおく．このとき，平衡ポテンシャルの存在定理における証明と同様の議論を展開することにより，$\inf_{w\in\mathcal{L}_{f,B}}\mathcal{E}_\alpha(w,w)$ の下限を実現する関数 $f_B\in\mathcal{L}_{f,B}$ が一意的に定まることがわかる．f_B を，***B* 上の *α*-被約関数** (α-reduced function on B) と呼ぶ．明らかに,

$$\mathcal{E}_\alpha(f_B,v)\ge 0\quad\forall v\in\mathcal{F}\quad\text{with}\quad\widetilde{v}\ge 0\text{ q.e. on }B \tag{2.33}$$

が成立する．また，補題 2.14 により f_B は，$\mathrm{supp}[\nu]\subset\bar{B}$ を満たす適当な測度 $\nu\in\mathcal{S}_0$ の α-potential である．更に，f 自身が α-potential であることから，$u:=f_B\wedge f$ も再び α-potential である ($u=U_\alpha\nu',\ \nu'\in\mathcal{S}_0$)．よって，定理 2.11 より

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\alpha(u,u)\ &=\ \int_E\widetilde{u}(x)\nu'(dx)\ \le\ \int_E\widetilde{f}_B(x)\nu'(dx)\ =\ \mathcal{E}_\alpha(f_B,u)\\ &=\ \int_E\widetilde{u}(x)\nu(dx)\ \le\ \int_E\widetilde{f}_B(x)\nu(dx)\ =\ \mathcal{E}_\alpha(f_B,f_B).\end{aligned}$$

が成り立つ．一方，$u\in\mathcal{L}_{f,B}$ であることから， これは $u=f_B$ を示している．ゆえに,

$$f_B\ \le\ f\quad m\text{-a.e.,} \tag{2.34}$$

$$\widetilde{f}_B\ =\ \widetilde{f}\quad\text{q.e. on}\ \ B. \tag{2.35}$$

となる．これらをまとめると,

補題 2.18 $\alpha > 0$ 及び $B \subset E$ に対して， α-potential $f \in \mathcal{F}$ の B 上の α-被約関数 f_B は (2.34) 及び (2.35) を満たす唯一の $\mathcal{F}$ の元である．

次の補題は，α-超過関数による α-被約関数及び 1-平衡ポテンシャルの特徴づけを行う際に用いられる．

補題 2.19 $u_1, u_2 \in L^2(E;m)$ をともに α-超過関数とする．このとき，$u_1 \le u_2$ m-a.e., $u_2 \in \mathcal{F}$ ならば $u_1 \in \mathcal{F}$ であり，$\mathcal{E}_\alpha(u_1,u_1) \le \mathcal{E}_\alpha(u_2,u_2)$ をみたす．

Proof: u_1, u_2 ともに α-超過関数であるから，

$$0 \le (u_1 - e^{-\alpha t}T_t u_1, u_1) \le (u_1 - e^{-\alpha t}T_t u_1, u_2) = (u_1, u_2 - e^{-\alpha t}T_t u_2) \le (u_2, u_2 - e^{-\alpha t}T_t u_2)$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} 0 &\le \lim_{t\downarrow 0} \mathcal{E}^{(t)}(u_1,u_1) + \alpha(u_1,u_1) \le \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\big\{(u_1 - e^{-\alpha t}T_t u_1, u_1)\big\} \\ &\le \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\big\{(u_2 - e^{-\alpha t}T_t u_2, u_2)\big\} = \mathcal{E}_\alpha(u_2,u_2) < \infty \end{aligned}$$

より，$u_1 \in \mathcal{F}$ となる． □

$\alpha > 0, B \subset E$ とし，f を α-potential とする．このとき，

$$\mathcal{U}_{f,B} := \Big\{u :\ 0 \le u \le f\ m\text{-a.e.},\ u\ \text{は}\ \alpha\text{-超過関数であり},\ \widetilde{u} = \widetilde{f}\ \ \text{q.e. on}\ B\Big\}$$

とおく．今示した補題から，$\mathcal{U}_{f,B}$ の第 1,2 の条件により $u \in \mathcal{U}_{f,B}$ ならば $u \in \mathcal{F}$ であることがわかるので，三つ目の条件が意味を持つことがわかる．

定理 2.14 α, f 及び B を上のものとする．このとき，以下が成立する：

(i) f の，B 上の α-被約関数 f_B は $\mathcal{U}_{f,B}$ の中の最小元である，すなわち，

$$f_B \in \mathcal{U}_{f,B}, \quad f_B \le u\ m\text{-}a.e. \quad \forall u \in \mathcal{U}_{f,B}$$

を満たす．

(ii) u を，$0 \le u \le f_B$ m-$a.e.$, u は α-超過函数であり，かつ $\tilde{u} = \tilde{f}$ q.e. on B を満たす可測函数とすれば，$u = f_B$ m-$a.e.$ を満たす．

(iii) B は $\mathrm{Cap}(B) < \infty$ を満たすとし，その平衡ポテンシャルを e_B とおく．u を $0 \le u \le e_B$ m-a.e. を満たし，1-超過函数であり，更に $\tilde{u} = 1$ q.e. on B を満たすならば，$u = e_B$ m-a.e. である．

Proof: (i): $f_B \in \mathcal{U}_{f,B}$ であることは既に示した．任意の $u \in \mathcal{U}_{f,B}$ に対して，$v = f_B \wedge u$ とおく．すると，v は α-超過関数であり，$v \le f_B$ を満たす．よって，$v \in \mathcal{U}_{f,B}$ に注意して，補題 2.19 を用いると $f_B = v$ m-a.e. を得る．

(ii): u を (ii) の条件を満たす関数とすると，$u \in \mathcal{U}_{f,B}$ である．よって，(i) より $f_B \le u$ m-a.e. を満たす． 従って，一つ目の条件より $f_B = u$ m-a.e. が成り立つ．

(iii): 補題 2.18 及び平衡ポテンシャルの性質により，$(e_B)_B = e_B$ が成立することがわかる． もし，u が (iii) の条件を満たすとすれば，(i) より，$e_B = (e_B)_B \le u$ となる．従って，このことと一つ目の条件を合わせると $e_B = u$ となることがわかる． □

α-potential に対して，その被約函数を考えることは，$\mathcal{S}_0$ 上の変換を考えることと同じである．その変換のことを**掃散** (そうさん：sweeping out) と呼ぶ：

$\mu \in \mathcal{S}_0$ に対して，α-potential $U_\alpha\mu$ の，B $(\subset E)$ 上の α-被約函数 $(U_\alpha\mu)_B$ は，再び α-potential となり，台が $\overline{B}$ となる $\mathcal{S}_0$ の測度が対応する．これを μ_B と表し，**B 上の μ の α-掃散測度** (**α**-sweeping out measure on **B**) と呼ぶ．すると，

$$U_\alpha\mu_B = (U_\alpha\mu)_B, \quad \mu \in \mathcal{S}_0 \tag{2.36}$$

となる．

これを対応する "α-超過函数の変換" として捉えなおすことを考える．そのために，次のような函数空間を考えよう： 任意の $B \subset X$ に対して，

$$\mathcal{F}_{E\setminus B} = \Big\{ u \in \mathcal{F} : \ \widetilde{u} = 0 \text{ q.e. on } B \Big\} \tag{2.37}$$

とおく．すると，$\mathcal{F}_{E\setminus B}$ は，各 $\alpha > 0$ に対して，Hilbert 空間 $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_\alpha)$ の閉部分空間となる．そこで，その直交補空間を $\mathcal{H}_\alpha^B$ とおく：

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{E\setminus B} \oplus \mathcal{H}_\alpha^B. \tag{2.38}$$

すると，(2.33) と (2.35) より，$f = (f - f_B) + f_B$ は，α-potential $f \in \mathcal{F}$ の直交分解を表している．すなわち，f の B 上の α-被約函数 f_B は，f の $\mathcal{H}_\alpha^B$ への射影を表している．

これに関連して，Dirichlet **空間においてスペクトル総合が可能であること** (the "spectral synthesis" is possible for the Dirichlet space) を示しておこう．

開集合 $G \subset E$ が $u \in \mathcal{F}$ の **α-正則集合** (α-regular set of u) であるとは，

$$\mathcal{E}_\alpha(u, v) = 0, \quad \forall\, v \in \mathcal{F} \cap C_0(E) \text{ with } \mathrm{supp}[v] \subset G. \tag{2.39}$$

を満たすときをいう． G_1 と G_2 がともに $u \in \mathcal{F}$ の α-正則集合とすると，$G_1 \cup G_2$ もそうである．実際，$\mathrm{supp}[v] \subset G_1 \cup G_2$ を満たす任意の $v \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$ について，$\mathrm{supp}[v] \setminus G_2 \subset O \subset \bar{O} \subset G_1$ を満たす任意の相対コンパクトな開集合 O と $\mathrm{supp}[w] \subset G_1$ 及び $w = 1$ on O を満たす $w \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$ をとる．このとき，$v_1 := vw$, $v_2 := v - vw$ として $v = v_1 + v_2$ と考えると，$v_i \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$ かつ $\mathrm{supp}[v_i] \subset G_i$, $i = 1, 2$ を満たすので，結局 v に対して (2.39) が成立することがわかる．

この考察により，$u \in \mathcal{F}$ に対する，α-特異集合，あるいは α-スペクトル集合 $\sigma_\alpha(u)$ を，u の α-正則集合の最大集合の補集合として定義することが出来る．すると，

$$\sigma_\alpha(U_\alpha\mu) = \mathrm{supp}[\mu], \quad \mu \in \mathcal{S}_0 \tag{2.40}$$

であることが示される． 実際，G を $U_\alpha\mu$ の α-正則集合の最大集合とする：

$$G := \bigcup_{O \in \mathcal{O}_\alpha(\mu)} O, \quad \mathcal{O}_\alpha(\mu) := \big\{ O \in \mathcal{O} \ \big|\ O \text{ は } U_\alpha\mu \text{ の } \alpha\text{-正則集合} \big\}.$$

このとき，$\sigma_\alpha(U_\alpha\mu) = E \setminus G$ である．$x \notin \mathrm{supp}[\mu]$ とすると，適当な $r > 0$ が存在して $B_x(r) \subset (\mathrm{supp}[\mu])^c$ を満たす．このとき，$v \in \mathcal{F} \cap C_0(X)$ を $\mathrm{supp}[v] \subset B_x(r)$ を満たすようにとると $v = 0$ on $\mathrm{supp}[\mu]$ である．よって，

$$\mathcal{E}_\alpha(U_\alpha\mu, v) = \int_E v(x)\mu(dx) = 0.$$

すなわち，$B_x(r)$ は $U_\alpha\mu$ の α-正則集合であることがわかる．よって，$B_x(r) \in \mathcal{O}_\alpha(\mu)$ となることから，

$$(\mathrm{supp}[\mu])^c \subset G$$

となることがわかる．この包含関係が真であると仮定すると，$x \in G \cap \mathrm{supp}[\mu]$ が存在する．すると，任意の $r > 0$ に対して $\mu(B_x(r)) > 0$ を満たし，かつ適当な $r_0 > 0$ に対して，$B_x(r_0) \subset G$ となる．そこで，$v \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$ で $v \geq 0$, $v = 1$ on $B_x(r_0/2)$ かつ $\mathrm{supp}[v] \subset B_x(r_0)$ を満たすものを考えると，

$$\mathcal{E}_\alpha(U_\alpha\mu, v) = \int_E v(x)\mu(dx) \geq \mu(B_x(r_0/2)) > 0$$

となるので，$B_x(r_0)$ は $U_\alpha(\mu)$ の α-正則集合とはならない．これは，$B_x(r_0) \subset G$ であることに反する．ゆえに $G \cap \mathrm{supp}[\mu] = \varnothing$ であるから (2.40) が成立する．

補題 2.20 G を開集合とし，

$$W_\alpha^G := \overline{\left\{u \in \mathcal{F}:\ \sigma_\alpha(u) \subset G\right\}}^{\sqrt{\mathcal{E}_1}}$$

とおく．このとき，$W_\alpha^G = \mathcal{H}_\alpha^G$ が成り立つ．

Proof: $u \in \left(W_\alpha^G\right)^\perp = \left\{u \in \mathcal{F}:\ \forall\, w \in W_\alpha^G,\ \mathcal{E}_\alpha(u,w) = 0\right\}$ をとると，

$$0 = \mathcal{E}_\alpha(u, G_\alpha f) = (u, f), \quad \forall\, f \in L_b^2(E;m) \ \text{ with } \ \mathrm{supp}[fm] \subset G. \tag{2.41}$$

が (2.40) により成立することがわかる．実際，$f \in L^2(E;m)$ に対して，レゾルベントの特徴づけによって

$$\mathcal{E}_\alpha(u, G_\alpha f) = (u, f) = \int_E u(x) f(x) m(dx), \quad u \in \mathcal{F}$$

が成り立つことから，$f \geq 0$ ならば $\mu(dx) := f(x)m(dx) \in \mathcal{S}_0$．このとき，$U_\alpha(fm) = G_\alpha f$．よって，$\mathrm{supp}[fm] \subset G$ ならば，$U_\alpha(fm) \in W_\alpha^G$ より，

$$0 = \mathcal{E}_\alpha(u, U_\alpha(fm)) = \mathcal{E}_\alpha(u, G_\alpha f) = (u, f)$$

を満たす．ゆえに，$f \in L^2(E;m)$ with $f \geq 0$, $\mathrm{supp}[fm] \subset G$ に対して，(2.41) が成立することがわかる． 従って，$u = 0$ m-a.e. G となる．よって，補題 2.9 より $u \in \mathcal{F}_{E\setminus G}$ となる． よって，$\left(W_\alpha^G\right)^\perp \subset \mathcal{F}_{E\setminus G}$ が分かった．

次に，$\mathcal{F}_{E\setminus G} \subset \{u \in \mathcal{F}:\ \sigma_\alpha(u) \subset G\}^\perp$ を示す．そのためには，$u \in \mathcal{F}_{E\setminus G}$ 及び $\sigma_\alpha(w) \subset G$ を満たす $w \in \mathcal{F}$ を任意にとると，$\mathcal{E}_\alpha(u,w) = 0$ が成り立つことを示せばよい．

いま，$u \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$ を $\mathrm{supp}[u] \subset G^c\big(\subset \sigma_\alpha(w)^c\big)$ を満たすとすると，$\sigma_\alpha(w)^c$ は w の α-正則集合となるから，$\mathcal{E}_\alpha(u,w) = 0$ が分かる．次に，$u \in \mathcal{F}_{E\setminus G}$ を有界な非負値関数であって，測度 $u\,m$ の台はコンパクトであるとし，また $f \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$ を $f \geq u$, m-a.e., $\mathrm{supp}[f] \cap \sigma_\alpha(w) = \varnothing$ を満たすようにとる．さらに $u_n \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$ で，$u_n \geq 0$ かつ u_n は u に $\mathcal{E}_1$-収束するものをとる．すると，$f \wedge u_n = (f + u_n)/2 - |f - u_n|/2$ は u に $\mathcal{E}_1$-収束する．よって，$f \wedge u_n \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$, $\mathrm{supp}[f \wedge u_n] \subset \sigma_\alpha(w)^c$ に注意すると

$$\mathcal{E}_\alpha(u,w) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_\alpha(f \wedge u_n, w) = 0$$

である． 最後に，一般の非負値の $u \in \mathcal{F}_{E\setminus G}$ に対しては，上と同じく $u_n \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$ で，$u_n \geq 0$ かつ u に $\mathcal{E}_1$-収束するものを取ると，各 $f \wedge u_n$ は有界な関数なので，今示したことを用いることができて，

$$\mathcal{E}_\alpha(u,w) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_\alpha(f \wedge u_n, w) = 0$$

が成り立つ．よって，$\mathcal{F}_{E\setminus G} \subset \{u \in \mathcal{F} : \sigma_\alpha(u) \subset G\}^\perp$ が成り立つ．以上より，

$$\left(W_\alpha^G\right)^\perp \subset \mathcal{F}_{E\setminus G} \subset \{u \in \mathcal{F} : \sigma_\alpha(u) \subset G\}^\perp$$

が成り立つことが分かるが，

$$\big(\{u \in \mathcal{F} : \sigma_\alpha(u) \subset G\}^\perp\big)^\perp = \overline{\{u \in \mathcal{F} : \sigma_\alpha(u) \subset G\}}^{\sqrt{\mathcal{E}_1}} = W_\alpha^G = \big((W_\alpha^G)^\perp\big)^\perp, \ \ (\mathcal{F}_{E\setminus G})^\perp = \mathcal{H}_\alpha^G$$

に注意すると，補題の主張が成立することが分かる． □

定理 2.15 $F \subset E$ を閉集合とし，$W_\alpha^F = \{u \in \mathcal{F}:\ \sigma_\alpha(u) \subset F\}$ とおくと，

$$W_\alpha^F = \mathcal{H}_\alpha^F$$

が成り立つ．とくに，$u \in \mathcal{F}$ は，$\sigma_\alpha(u)$ に台を持つ $\mathcal{S}_0$ の測度の α-potential の有限和の関数列によって $\mathcal{E}_1$-近似できる．

Proof: $W_\alpha^F \supset \mathcal{H}_\alpha^F$ は自明である．実際，$u \in \mathcal{H}_\alpha^F$ とすると，

$$\mathcal{E}_\alpha(u,w)=0, \quad w \in \mathcal{F}_{E\setminus F}=\{w\in\mathcal{F}:\ \tilde{w}=0 \text{ q.e. on } F\}.$$

そこで，$\mathrm{supp}[w]\subset F^c$ を満たす $w\in\mathcal{F}\cap C_0(E)$ を任意にとると，明らかに $w\in\mathcal{F}_{E\setminus F}$ より $\mathcal{E}_\alpha(u,w)=0$ が成立することから，F^c は u の α-正則集合となる．よって，$F^c\subset\sigma_\alpha(u)^c$. 従って，$\sigma_\alpha(u)\subset F$ より $u\in W_\alpha^F$ が成り立つ．

逆の包含関係を示すために，まず

$$W_\alpha^F=\bigcap_{n=1}^{\infty} W_\alpha^{G_n} \tag{2.42}$$

が成り立つことを見ていく．ただし，$\{G_n\}$ は，$G_n\supset\bar{G}_{n+1}$，$\cap_{n=1}^\infty G_n=F$ を満たす開集合列である．

各 n に対して，$F\subset G_n$ より，$W_\alpha^F\subset W_\alpha^{G_n}$ が成立することは明らか．よって，$W_\alpha^F\subset\bigcap_{n=1}^\infty W_\alpha^{G_n}$ が成り立つ．逆に，任意の n について $u\in W_\alpha^{G_n}$ とすると，先の補題により，$u\in\mathcal{H}_\alpha^{G_n}$ だから，各 $w\in\mathcal{F}_{E\setminus G_n}$ に対して，$\mathcal{E}_\alpha(u,w)=0$ となる．そこで，$\mathrm{supp}[w]\subset\bar{G}_n^c$ を満たす任意の $w\in\mathcal{F}\cap C_0(E)$ をとると，$w=0$ on G_n より，$\mathcal{E}_\alpha(u,w)=0$ が成り立つ．これは $\bar{G}_n^c$ が u の α-正則集合となることから，$\sigma_\alpha(u)^c\supset\bar{G}_n^c$ が成り立ち，したがって，$\sigma_\alpha(u)\subset\bar{G}_n$ が分かる． n は任意だから $\sigma_\alpha(u)\subset\bigcap_{n=1}^\infty\bar{G}_n=F$ となる．ゆえに，$\bigcap_{n=1}^\infty W_\alpha^{G_n}\subset W_\alpha^F$ が成り立つ．よって，(2.42) が成立する．

今，$u\in\mathcal{F}$ を α-potential とし，u の W_α^F への projection を $\mathcal{P}_F u$ と書くことにすると，

- $\sigma_\alpha(\mathcal{P}_F u)\subset F, \quad \mathcal{E}_\alpha(\mathcal{P}_F u,w)=0,\ \ \forall\, w\in\mathcal{F}\cap C_0(E) \text{ with } \mathrm{supp}[w]\cap\sigma_\alpha(\mathcal{P}_F u)=\varnothing,$
- $\mathcal{E}_\alpha(u-\mathcal{P}_F u,w)=0,\ \ \forall\, w\in W_\alpha^F,$
- (u が α-potential であることから) for some $\mu\in\mathcal{S}_0$,

$$\int_E w(x)\mu(dx)=\mathcal{E}_\alpha(u,w), \quad w\in\mathcal{F}\cap C_0(E).$$

ところで，u の $\mathcal{H}_\alpha^{G_n}$ への projection $u_n:=u_{G_n}$ は G_n 上の α-被約関数であり α-potential となるから，

$$u_n\le u \quad m\text{-a.e.}, \quad \tilde{u}_n=\tilde{u} \quad \text{q.e. on } G_n, \quad \mathcal{E}_\alpha(u_n,u_n)\le\mathcal{E}_\alpha(u,u) \tag{2.43}$$

を満たす． また，先の補題から $u_n\in\mathcal{H}_\alpha^{G_n}=W_\alpha^{G_n}$ により，

$$\mathcal{E}_\alpha(u_n,w)=0,\ \ \forall\, w\in\mathcal{F}_{E\setminus G_n}, \quad \mathcal{E}_\alpha(u-u_n,w)=0,\ \ \forall\, w\in\mathcal{H}_\alpha^{G_n} \tag{2.44}$$

である．(2.43) より，$\{u_n\}$ は $\mathcal{E}_\alpha$ に関して有界であるから，適当な部分列 $\{n_k\}$ と $v\in\mathcal{F}$ が存在して，u_{n_k} は v に $\mathcal{E}_\alpha$ に関して弱収束する：

$$\lim_{k\to\infty}\mathcal{E}_\alpha(u_{n_k},w)=\mathcal{E}_\alpha(v,w),\ \ \forall\, w\in\mathcal{F}.$$

任意の $w\in W_\alpha^F$ に対して，(2.42) より任意の n について $w\in W_\alpha^{G_n}=\mathcal{H}_\alpha^{G_n}$ となるから， (2.44) によって

$$\mathcal{E}_\alpha(u-v,w)=0$$

が成り立つ．そこで，$w\in\mathcal{F}\cap C_0(E)$ を $\mathrm{supp}[w]\cap F=\varnothing$ となるようにとると，$\{G_n\}$ の取り方から，N を適当に取ると，$n\ge N$ ならば，$\mathrm{supp}[w]\cap G_n=\varnothing$ を満たす．よって，$\mathcal{E}_\alpha(u_n,w)=0$, 従って $\mathcal{E}_\alpha(v,w)=0$ が成り立つことが分かる．よって，$\sigma_\alpha(v)\subset F$ となるので，$v\in W_\alpha^F$ がいえる．ゆえに，$v=\mathcal{P}_F u$ である．ところで，u は α-potential なので，各 n について $W_\alpha^{G_n}=\mathcal{H}_\alpha^{G_n}$ 上への projection u_n も α-potential だから，適当な $\mu_n\in\mathcal{S}_0$ が存在して，$U_\alpha\mu_n=u_n$ かつ $\mathrm{supp}[\mu_n]=\sigma_\alpha(u_n)\subset\bar{G}_n$ が成り立つ．そこで，任意のコンパクト集合 K に対して，$g\in\mathcal{F}_+\cap C_0(E)$ を $g(x)=1$ on K を満たすようにとると，

$$\mu_n(K)=\int_K g\,d\mu_n\le\int_E g\,d\mu_n=\mathcal{E}_\alpha(u_n,g)$$

を満たす．よって，

$$\mu_n(K) \le \sqrt{\mathcal{E}_\alpha(g,g)}\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(u_n,u_n)} \le \sqrt{\mathcal{E}_\alpha(g,g)}\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(u,u)}.$$

K は任意だったから，適当な Radon 測度 ν が存在して，μ_n は ν に漠収束し，

$$\mathcal{E}_\alpha(v,g) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_\alpha(u_n,g) = \int_E g d\mu_n = \int_E g d\nu, \quad g \in \mathcal{F} \cap C_0(E).$$

$g \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$ を $\mathrm{supp}[g] \subset F^c$ を満たすようにとると，$\mathcal{E}_\alpha(v,g) = 0$ となり，v は α-potential であるだけでなく，$\mathrm{supp}[\nu] \subset F$ であることが分かる．よって，$v = \mathcal{P}_F u \in \mathcal{H}_\alpha^F$ となる． □

Chapter 3

確率論的準備:Markov過程

ここでは，あとで必要となる程度の Markov 過程の定義を行う．まず，確率過程の定義を述べておく． そのために，$(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ を確率空間，E を局所コンパクト可分な距離空間とし，$\mathcal{B}$ をその上の位相的 Borel 集合族とする．また，$\mathcal{P}(E)$ を $(E, \mathcal{B})$ 上の確率測度の全体集合とする．E 上の関数 f が $\mathcal{B}$-可測であることを $f \in \mathcal{B}$ と書くことにする．

3.1 一般的定義

$\mu \in \mathcal{P}(E)$ に対して，μ に対する $\mathcal{B}$ の完備化を $\mathcal{B}^\mu$ と表す:

$$\mathcal{B}^\mu := \big\{ A \subset E : \ \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B} \ \text{ s.t. } \ B_1 \subset A \subset B_2, \ \ \mu(B_2 \setminus B_1) = 0 \ \big\}.$$

また，$\mathcal{B}^* := \bigcap_{\mu \in \mathcal{P}(E)} \mathcal{B}^\mu$ とおいて，$\mathcal{B}^*$ の元を**普遍可測集合** (universally measurable set) と呼ぶ．$\mathcal{C}$ を $\mathcal{B}$ の部分 σ-加法族とすると，明らかに

$$\mathcal{C}^\mu \subset \mathcal{B}^\mu, \quad \mu \in \mathcal{P}(E)$$

が成り立つ．また，$\mathcal{U}$ を $\mathcal{P}(E)$ の部分集合とするとき，$\mathcal{U}$ に対する $\mathcal{C}$ の完備化を

$$\mathcal{C}^{\mathcal{U}} := \bigcap_{\mu \in \mathcal{U}} \mathcal{C}^\mu$$

として定義する．明らかに $\big(\mathcal{C}^{\mathcal{U}}\big)^{\mathcal{U}} = \mathcal{C}^{\mathcal{U}}$ が成り立つ．また，$f \in \mathcal{C}^{\mathcal{U}}$ であるための必要十分条件は

$$\forall \mu \in \mathcal{U}, \ \exists f_1, f_2 \in \mathcal{C} \ \text{ s.t. } \ f_1(x) \le f(x) \le f_2(x), \ x \in E, \ \ \mu\big(\{f_2 > f_1\}\big) = 0$$

が成り立つことである．次に，**$\mathcal{C}$ の $\mathcal{B}^{\mathcal{U}}$ における完備化 $\tilde{\mathcal{C}}^{\mathcal{U}}$** を以下のように定義する：

$$\tilde{\mathcal{C}}^{\mathcal{U}} := \Big\{ A \subset E : \ \forall \mu \in \mathcal{U}, \ \exists B \in \mathcal{C} \ \text{ s.t. } \ A \setminus B, \ B \setminus A \in \mathcal{B}^{\mathcal{U}}, \ \ \mu(A \setminus B) = \mu(B \setminus A) = 0 \ \Big\}.$$

特に $\mathcal{U} = \mathcal{P}(E)$ のときは，$\mathcal{U}$ を省略して $\tilde{\mathcal{C}}^{\mathcal{U}} = \tilde{\mathcal{C}}$ と書く．$\tilde{\mathcal{C}}^{\mathcal{U}}$ に関しては，次が成り立つ．

(i) $\tilde{\mathcal{C}}^{\mathcal{U}}$ は E 上の σ-加法族であり， $\mathcal{C} \subset \tilde{\mathcal{C}}^{\mathcal{U}} \subset \mathcal{B}^{\mathcal{U}}$;

(ii) $\mathcal{C}^{\mathcal{U}} \subset \tilde{\mathcal{C}}^{\mathcal{U}}$.

E に値を取る Ω 上の可測函数の集合族 $\{X_t\}_{t \in [0,\infty]}$ を，**$(E, \mathcal{B})$ を状態空間とする確率空間 $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ 上の確率過程** (stochastic process) と呼ぶ．各 $\omega \in \Omega$ に対して，写像 $[0, \infty] \ni t \mapsto X_t(\omega) \in E$ を ω の**経路** (trajectory) または**標本路** (sample path) と呼ぶ．$\mathcal{M}$ の部分 σ-加法族の集合族 $\{\mathcal{M}_t\}_{t \in [0,\infty]}$ で，

(i) $t < s \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}_t \subset \mathcal{M}_s$;

(ii) 各 $t \in [0, \infty]$ に対して，$X_t \in \mathcal{M}_t / \mathcal{B}$

を満たすとき，確率過程 $\{X_t\}_{t\in[0,\infty]}$ は $\{\mathcal{M}_t\}$ に**適合している**という．このとき，$\{\mathcal{M}_t\}_{t\in[0,\infty]}$ を ($\mathcal{M}$ の) **フィルトレーション**と呼ぶ．また，

$$\mathscr{F}_\infty^0 := \sigma\big(X_s, s\in[0,\infty)\big), \qquad \mathscr{F}_t^0 := \sigma\big(X_s, s\in[0,\infty),\ s\le t\big), \quad t\in[0,\infty)$$

と定めると，$\{\mathscr{F}_t^0\}_{t\in[0,\infty]}$ は最小のフィルトレーションである．フィルトレーション $\{\mathcal{M}_t\}$ は次の条件を満たすとき**右連続なフィルトレーション**と呼ぶ：

$$\mathcal{M}_t = \mathcal{M}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{M}_s, \quad t\in[0,\infty).$$

E は局所コンパクト空間なので，E_Δ を E の 1 点コンパクト化とする．E が既にコンパクトであるときは，Δ を E の孤立点として考える：$E_\Delta = E\cup\{\Delta\}$．このとき，可測空間 $(E_\Delta, \mathcal{B}_\Delta)$ が出来る：$\mathcal{B}_\Delta := \mathcal{B}\cup\big\{A\cup\{\Delta\} : A\in\mathcal{B}\big\}$.

定義 3.1 組 M$=(\Omega, \mathcal{M}, \{\mathcal{M}_t\}, \zeta, \{\theta_t\}, \{X_t\}_{t\in[0,\infty]}, \{\mathbb{P}_x\}_{x\in E_\Delta})$ は，次の条件を満たすとき **$(E,\mathcal{B})$ を状態空間とする Markov 過程** (Markov process) であるという：

(M.1) 各 $x\in E_\Delta$ に対して，$\{X_t\}_{t\in[0,\infty]}$ は，$(E_\Delta,\mathcal{B}_\Delta)$ を状態空間とする確率空間 $(\Omega,\mathcal{M},\mathbb{P}_x)$ 上の確率過程であって，各 $\omega\in\Omega$ に対して，

(i) $X_\infty(\omega)=\Delta$;

(ii) $X_t(\omega)=\Delta,\ \forall t\ge\zeta(\omega) := \inf\{s\ge0 : X_s(\omega)=\Delta\}$;

(iii) 各 $t\in[0,\infty]$ に対して，写像 $\theta_t:\Omega\to\Omega$ は，$X_s(\theta_t\omega)=X_{s+t}(\omega),\ s\ge0$ を満たす；

(M.2) 各 $t\ge0,\ A\in\mathcal{B}$ に対して，$x\mapsto\mathbb{P}_x(X_t\in A)$ は E 上の $\mathcal{B}$-可測函数である．

(M.3) (Markov property) $\{\mathcal{M}_t\}$ は $\mathcal{M}$ のフィルトレーションであり，

$$\mathbb{P}_x(X_{t+s}\in A|\mathcal{M}_t) = \mathbb{P}_{X_t}(X_s\in A), \quad \mathbb{P}_x\text{-a.s.} \tag{3.1}$$

が任意の $x\in E,\ t,s\ge0,\ A\in\mathcal{B}$ に対して成立する．

(M.4) $\mathbb{P}_\Delta(X_t=\Delta)=1,\ \ t\ge0.$

(M.5) $\mathbb{P}_x(X_0=x)=1,\ \ x\in E.$

(M1) における $\theta_t,\ \zeta$ を，それぞれ M の**平行移動作用素** (shift operator, translation operator)，**生存時間** (life time) と呼ぶ．また，(M.3) を満たすとき，M **はフィルトレーション $\{\mathcal{M}_t\}$ に関して** Markov **性を持つ**という．ここでは，更に次の条件を課す (その場合，右連続 Markov 過程ということもある)．

(M.6) (cadlag property) 各 $\omega\in\Omega$ に対して，経路 $t\mapsto X_t(\omega)$ は $[0,\infty)$ において右連続であり，$(0,\infty)$ において左極限を E_Δ において持つ．

次の補題は，定義により容易に示すことが出来る．

補題 3.1 M を Markov 過程とする．このとき，各 $\Lambda\in\mathscr{F}_\infty^0$ に対して，写像 $x\mapsto P_x(\Lambda)$ は $\mathcal{B}_\Delta$-可測である．

次に，$\mathbb{P}_\mu(\Lambda) := \int_{E_\Delta}\mathbb{P}_x(\Lambda)\mu(dx),\ \mu\in\mathcal{P}(E_\Delta),\ \Lambda\in\mathscr{F}_\infty^0$ とおくと，$\mathbb{P}_\mu$ は $(\Omega,\mathscr{F}_\infty^0)$ 上の確率測度となる．そこで，$\mathbb{P}_\mu$ に対する $\mathscr{F}_\infty^0$ の完備化を $\mathscr{F}_\infty^\mu$ とする．各 $t\in[0,\infty)$ に対して $\mathbb{P}_\mu$ に対する $\mathscr{F}_\infty^\mu$ における $\mathscr{F}_t^0$ の完備化を $\mathscr{F}_t^\mu$ と表す． すなわち，$A\in\mathscr{F}_t^\mu$ であるための必要十分条件は，

$$\exists B\in\mathscr{F}_t^0 \text{ s.t. } A\setminus B,\ B\setminus A\in\mathscr{F}_\infty^\mu,\ \ \mathbb{P}_\mu\big(A\setminus B\big)=\mathbb{P}_\mu\big(B\setminus A\big)=0$$

である． $\mathscr{F}_\infty := \bigcap_{\mu\in\mathcal{P}(E_\Delta)}\mathscr{F}_\infty^\mu,\ \ \mathscr{F}_t := \bigcap_{\mu\in\mathcal{P}(E_\Delta)}\mathscr{F}_t^\mu,\ t\in[0,\infty)$ とおく．$\{\mathscr{F}_t\}$ は**完備化された最小の適合的なフィルトレーション**である (minimum completed admissible filtration)．同様に，$\{\mathscr{F}_{t+}^0\},\ \{\mathscr{F}_t^\mu\}$ はともに適合的なフィルトレーションであることがわかる．

補題 3.2　M が $\{\mathscr{F}^0_{t+}\}$ に関して Markov 性を持てば，フィルトレーション $\{\mathscr{F}^\mu_t\}$ および $\{\mathscr{F}_t\}$ は右連続である．

Proof:　仮定により，任意の $Y \in (\mathscr{F}^0_\infty)_b,\ t \in [0,\infty)$ および $\mu \in \mathcal{P}(E)$ に対して，

$$\mathbb{E}_\mu[Y \circ \theta_t \big| \mathscr{F}^0_{t+}] = \mathbb{E}_{X_t}[Y] = \mathbb{E}_\mu[Y \circ \theta_t \big| \mathscr{F}^0_t], \quad \mathbb{P}_\mu\text{a.s.}$$

が成り立つ．次に，以下の主張が成り立つと仮定する：

$$\forall\, Y \in (\mathscr{F}^0_\infty)_b,\ \mu \in \mathcal{P}(E), \quad \mathbb{E}_\mu\big[Y \big| \mathscr{F}^0_{t+}\big] = \mathbb{E}_\mu\big[Y \big| \mathscr{F}^0_t\big], \quad \mathbb{P}_\mu\text{-a.s.} \tag{3.2}$$

このとき，$\Lambda \in \mathscr{F}^0_{t+}$ に対して $Y = 1_\Lambda$ とおくと，(3.2) により，各 $\mu \in \mathcal{P}(E_\Delta)$ に対して，適当な $g \in \mathscr{F}^0_t$ が存在して，$\mathbb{P}_\mu(1_\Lambda \neq g) = 0$ が成り立つことが分かる，$\Lambda \in \mathscr{F}^\mu_t$ となる．従って，$\mathscr{F}^0_{t+} \subset \mathscr{F}^\mu_t$ が成立する．また，$\mu \in \mathcal{P}(E_\Delta)$ は任意だったから $\mathscr{F}^0_{t+} \subset \mathscr{F}_t$ が成立することもわかる．また，

$$(\mathscr{F}^0_{t+})^\mu = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}^\mu_s$$

に注意すると，$\mathscr{F}^\mu_t$ の右連続性，従って，$\mathscr{F}_t$ の右連続性がわかる．

一方，単調族定理によって，(3.2) は，各 $t \in [0,\infty)$ に対して，任意の $n \in \mathbb{N},\ f_i \in (\mathcal{B}_\Delta)_b\,(i = 1,2,\ldots,n),\ 0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_i \le t < t_{i+1} < \cdots < t_n$ に対して，$Y = \displaystyle\prod_{i=1}^n f_j \circ X_{t_i}$ と表示される場合について示せば十分であることに注意する．このとき，Y は平行移動作用素 θ_t を用いて，$Y = \big(\displaystyle\prod_{k=1}^i f_k \circ X_{t_k}\big)(G \circ \theta_t\big)$ と書き表すことができる．但し，$G = \displaystyle\prod_{k=i+1}^n f_k \circ X_{t_k - t}$ である．よって，

$$\mathbb{E}_\mu\big[Y \big| \mathscr{F}^0_{t+}\big] = \prod_{k=1}^i (f_k \circ X_{t_k}) \mathbb{E}_{X_t}\big[G\big] = \mathbb{E}_\mu[Y | \mathscr{F}^0_t], \quad \mathbb{P}_\mu\text{-a.s.}$$

が成り立つことがわかるので，(3.2) の証明が終わる．　□

次の補題の証明は省略する．

補題 3.3　$\mu \in \mathcal{P}(E_\Delta)$ とする．このとき，任意の $\{\mathscr{F}^\mu_t\}$-停止時間 σ に対して，適当な $\{\mathscr{F}^0_t\}$-停止時間 σ' が存在して $\mathbb{P}_\mu(\sigma \neq \sigma') = 0$ を満たす．さらに，$\Lambda \in \mathscr{F}^\mu_\sigma$ に対して，$\Lambda' \in \mathscr{F}^0_{\sigma'+}$ が存在して $\mathbb{P}_\mu(\Lambda \triangle \Lambda') = 0$ が成り立つ．但し，$\mathscr{F}^0_{\sigma'+} := \big\{\Lambda \in \mathscr{F}^0_\infty :\ \Lambda \cap \{\sigma' \le t\} \in \mathscr{F}^0_{t+},\ \forall t \ge 0\big\}$ である．

定義 3.2 Markov 過程 M が，フィルトレーション $\{\mathcal{M}_t\}$ に関して**強** Markov **性** (strong Markov w.r.t. $\{\mathcal{M}_t\}$) を持つとは，

(i) $\{\mathcal{M}_t\}$ は右連続なフィルトレーションであり，

(ii) 任意の $\mu \in \mathcal{P}(E_\Delta),\ A \in \mathcal{B}_\Delta,\ s \ge 0$ および $\{\mathcal{M}_t\}$-停止時間 σ に対して，

$$\mathbb{P}_\mu\big(X_{\sigma+s} \in A \big| \mathcal{M}_\sigma\big) = \mathbb{P}_{X_\sigma}\big(X_s \in A\big), \quad \mathbb{P}_\mu\text{-a.s.} \tag{3.3}$$

が成り立つときをいう．さらに，M が $(0,\infty))$ 上で**準左連続** (quasi-left continuous on $(0,\infty)$) であるとは，任意の単調増大な $\{\mathcal{M}_t\}$-停止時間の列 $\{\sigma_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ とするとき，

$$\mathbb{P}_\mu\big(\lim_{n\to\infty} X_{\sigma_n} = X_\sigma,\ \sigma < \infty\big) = \mathbb{P}_\mu\big(\sigma < \infty\big), \quad \mu \in \mathbb{P}(E_\Delta) \tag{3.4}$$

が成り立つときをいう．

Markov 過程 $\mathrm{M} = (\Omega, \mathcal{M}, X_t, \mathbb{P}_x)$ は，適当な適合的なフィルトレーション $\{\mathcal{M}_t\}$ に関して強 Markov 性を持ち，$(0,\infty)$ 上で準左連続であるとき，$\boldsymbol{(E,\mathcal{B})}$ **上の** Hunt **過程** (Hunt process on $(E,\mathcal{B})$) と呼ばれる．

$\mathsf{M}=(\Omega,\mathcal{M},X_t,\mathbb{P}_x)$ を $(E,\mathcal{B})$ 上の Hunt 過程とする．$B\subset E$, $\omega\in\Omega$ に対して，次のように 3 つのタイプの B の到達時間を定義する：

$$
\begin{aligned}
\sigma_B(\omega) &:= \inf\big\{t>0:\ X_t(\omega)\in B\big\},\\
\dot\sigma_B(\omega) &:= \inf\big\{t\geq 0:\ X_t(\omega)\in B\big\},\\
\hat\sigma_B(\omega) &:= \inf\big\{t>0:\ X_{t-}(\omega)\in B\big\}.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

但し，下限をとる集合 $\{\cdots\}$ が空であるときは，それぞれ $+\infty$ と定めることにする．定義から明らかに，$s>0$ に対して，

$$
s+\sigma_B(\theta_s\omega)=\inf\big\{t>s:\ X_t(\omega)\in B\big\},\quad s+\dot\sigma_B(\theta_s\omega)=\inf\big\{t\geq s:\ X_t(\omega)\in B\big\}
$$

が成り立つ．よって，

$$
\sigma_B(\omega)=\lim_{s\downarrow 0}\big(s+\sigma_B(\theta_s\omega)\big)=\lim_{s\downarrow 0}\big(s+\dot\sigma_B(\theta_s\omega)\big)
$$

となる．

$B\subset E$ が開集合のときは，$\sigma_B(\omega)=\dot\sigma_B(\omega)=\hat\sigma_B(\omega)$ であり，すべて $\{\mathscr{F}^0_{t+}\}$-停止時間となる．実際，

$$
\{\sigma_B<t\}=\{\dot\sigma_B<t\}=\{\hat\sigma_B<t\}=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap(0,t)}\{X_r\in B\}\in\mathscr{F}^0_t
$$

だからである． 以下の定理の証明は省略する：

定理 3.1 任意の $B\in\mathcal{B}$ に対して，σ_B, $\dot\sigma_B$, $\hat\sigma_B$ はすべて $\{\mathscr{F}_t\}$-停止時間であり，

$$
\dot\sigma_B\leq\sigma_B\leq\hat\sigma_B,\quad \mathbb{P}_\mu\text{-a.s.},\quad \mu\in\mathcal{P}(E_\Delta)
$$

が成り立つ．

次に，正則点，尖細集合，細位相等の概念を紹介する．そのために，Blumenthal の 0-1 法則を紹介する．

命題 3.1 (Blumenthal's Zero-One Law) $\Lambda\in\mathscr{F}_0$ に対して，$\mathbb{P}_x(\Lambda)=0$ または 1 が成り立つ．

Proof: 任意の $\Lambda\in\mathscr{F}^0_0$ に対して，(M.1-iii) より $\theta_0^{-1}\Lambda=\Lambda$ となることに注意しておく． すると (M.3) および (M.5) より，

$$
\mathbb{P}_x(\Lambda)=\mathbb{P}_x(\Lambda\cap\theta_0^{-1}\Lambda)=\mathbb{E}_x\big[\mathbb{P}_{X_0}(\Lambda);\Lambda\big]=\big(\mathbb{P}_x(\Lambda)\big)^2
$$

が成り立つことから，$\mathbb{P}_x(\Lambda)=0$ または 1 となる．

次に，任意の $\Lambda\in\mathscr{F}_0=\bigcap_{\mu\in\mathcal{P}(E_\Delta)}\mathscr{F}^\mu_0$ を取る．このとき，各 $x\in E_\Delta$ に対して $\mu:=\delta_x\in\mathcal{P}(E_\Delta)$ とおくと，$\Lambda\in\mathscr{F}^\mu_0$ だから，補題 3.3 より適当な $\Lambda'\in\mathscr{F}^0_0$ が存在して，$\mathbb{P}_x(\Lambda\triangle\Lambda')=0$, つまり $\mathbb{P}_x(\Lambda)=\mathbb{P}_x(\Lambda')$ を満たす．よって，$\mathbb{P}_x(\Lambda)=0$ または 1 が成り立つ． □

集合 $A\subset E_\Delta$ が**概 Borel 集合** (nearly Borel set) であるとは，任意の $\mu\in\mathcal{P}(E_\Delta)$ に対して，適当な Borel 集合 $B_1,B_2\in\mathcal{B}_\Delta$ が存在して，

$$
B_1\subset A\subset B_2,\quad \mathbb{P}_\mu\big(X_t\in B_2\setminus B_1\ \text{for some}\ t\geq 0\big)=0
\tag{3.6}
$$

を満たすときをいう．概 Borel 集合全体を $\mathcal{B}^n_\Delta$ と表す．$\mathcal{B}^n_\Delta$ は $\mathcal{B}_\Delta$ を含む E_Δ 上の σ-加法族であることが分かる．また，E の部分集合で概 Borel 集合であるものの全体を $\mathcal{B}^n$ で表す．すると，$\mathcal{B}^n$ は E 上の σ-加法族であり $\mathcal{B}$ を含む．従って，$\mathcal{B}\subset\mathcal{B}^n\subset\mathcal{B}^*$ が成立する．

概 Borel 集合 $A\in\mathcal{B}^n$ に対して，A への到達時間は $\{\mathscr{F}_t\}$-停止時間である．実際，各 $\mu\in\mathcal{P}(E_\Delta)$ に対して，$B_1,B_2\in\mathcal{B}_\Delta$ が存在して (3.6) を満たす．このとき，

$$
\{X_t\in B_1\ \text{for some}\ t\geq 0\}=\{X_t\in B_2\ \text{for some}\ t\geq 0\},\quad \mathbb{P}_\mu\text{-a.s.}
$$

だから，$\{\sigma_A\leq t\}$ と $\{\sigma_{B_1}\leq t\}\in\mathscr{F}_t$ は $\mathbb{P}_\mu$ に関する零集合の違いしかない．よって，σ_A は $\{\mathscr{F}_t\}$-停止時間である．特に $\{\sigma_A>0\}\in\mathcal{F}_0$ より，$\mathbb{P}_x(\sigma_A>0)=0$ または 1 であることがわかる．

定義 3.3 $A \in \mathcal{B}^n$ とする．$x \in E_\Delta$ が ***A* に対して正則** (regular for A) であるとは，$\mathbb{P}_x(\sigma_A > 0) = 0$ を満たすときをいう．$\mathbb{P}_x(\sigma_A > 0) = 1$ となるとき x は ***A* に対して非正則** (irregular for A) という．A^r を A に対して正則な点全体を表す：$A^r := \{x \in E_\Delta : \mathbb{P}_x(\sigma_A > 0) = 0\} = \{x \in E_\Delta : \mathbb{P}_x(\sigma_A = 0) = 1\}$.

一般に，A° を A の内部，A^a を A の閉包とすると，$A^\circ \subset A^r \subset A^a$ が成り立つ．

次の定理の証明も省略する：

定理 3.2 $A \subset E$ を概 Borel 集合とし，$\mu \in \mathcal{P}(E)$ とする．

(i) 次を満たす単調増加なコンパクト集合列 $\{B_n\}$ が存在する：

$$B_n \subset B_{n+1} \subset A, \quad \mathbb{P}_\mu\big(\lim_{n\to\infty} \sigma_{B_n} = \sigma_A\big) = 1. \tag{3.7}$$

(ii) $\mu(A \setminus A^r) = 0$ を満たすとする．このとき，次を満たす単調減少な開集合列 $\{O_n\}$ が存在する：

$$O_{n+1} \supset O_n \supset A, \quad \mathbb{P}_\mu\big(\lim_{n\to\infty} \sigma_{O_n} = \sigma_A\big) = 1. \tag{3.8}$$

定理 3.3 A を概 Borel 集合とする．このとき，任意の $\mu \in \mathcal{P}(E_\Delta)$ に対して，

$$\mathbb{P}_\mu\big(X_{\sigma_A} \in A \cup A^r, \sigma_A < \infty\big) = \mathbb{P}_\mu\big(\sigma_A < \infty\big).$$

Proof: $0 < t < \sigma_A$ に対しては，$X_t \notin A$ であるから，もし $X_{\sigma_A} \notin A$ ならば，$\sigma_A + \sigma_A \circ \theta_{\sigma_A} = \sigma_A$ が成り立つ．従って，Markov 性より

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\mu\big(\sigma_A < \infty,\ X_{\sigma_A} \notin A\big) &= \mathbb{P}_\mu\big(\sigma_A \circ \theta_{\sigma_A} = 0,\ \sigma_A < \infty,\ X_{\sigma_A} \notin A\big) \\ &= \mathbb{E}_\mu\big[\mathbb{P}_{X_{\sigma_A}}(\sigma_A = 0); \sigma_A < \infty,\ X_{\sigma_A} \notin A\big] \end{aligned}$$

だから，$\{\sigma_A < \infty,\ X_{\sigma_A} \notin A\}(=: H)$ 上で $\mathbb{P}_{X_{\sigma_A}}(\sigma_A = 0) = 1$ が，従って，H 上で $X_{\sigma_A} \in A^r$ が $\mathbb{P}_\mu$-a.s. について成立することがわかる．

□

3.2　推移関数と超過関数

Hunt 過程 M が与えられたとき，

$$p_t(x, A) := \mathbb{P}_x(X_t \in A), \quad x \in E,\ t \geq 0,\ A \in \mathcal{B}$$

とおくと，$p_t(x, A)$ は t を止めるごとに，$(E, \mathcal{B})$ 上の劣 Markov 核 (sub-Markov kernel) となる：

(t.1) 各 $A \in \mathcal{B}$ に対して，$x \mapsto p_t(x, A)$ は，$\mathcal{B}$-可測関数である;

(t.2) 各 $x \in E$ に対して，$A \mapsto p_t(x, A)$ は，$p_t(x, E) \leq 1$ を満たす $(E, \mathcal{B})$ 上の測度である．

これを，**M の Markov 推移関数** (Markovian transition function) とよぶ．さらに，$p_t(x, A)$ は次の性質を持つ：

(t.3) (Chapman-Kolmogorov) 各 $s, t \geq 0$ に対して，

$$p_{s+t}(x, A) = \int_E p_s(y, A) p_t(x, dy), \quad x \in E,\ A \in \mathcal{B}. \tag{3.9}$$

M の Markov 推移関数 $p_t(x, A)$ に対して，そのラプラス変換

$$R_\alpha(x, A) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p_t(x, A) dt, \quad \alpha > 0, x \in E, A \in \mathcal{B}$$

は，次の意味で E 上の Markov Resolvent **核** (Markovian Resolvent kernel) を与える：

(R.1) 各 $\alpha>0,\, x\in E$ に対して，$A\mapsto \alpha R_\alpha(x,A)$ は $(E,\mathcal{B})$ 上の測度で $\alpha R_\alpha(x,E)\le 1$ を満たす;

(R.2) 各 $\alpha>0,\, A\in\mathcal{B}$ に対して，$x\mapsto R_\alpha(x,A)$ は $\mathcal{B}$-可測函数である;

(R.3) (Resolvent equation) 各 $\alpha,\,\beta>0,\, A\in\mathcal{B}$ に対して，

$$R_\alpha(x,A)-R_\beta(x,A)+(\alpha-\beta)\int_E R_\alpha(y,A)R_\beta(x,dy)=0.$$

M の Markov 推移関数 $\{p_t(x,A),\ t\ge 0,\ x\in E,\ A\in\mathcal{B}\}$ とする．このとき，$f:E\to\mathbb{R}$ を有界な $\mathcal{B}$-可測函数とする (これを $f\in\mathcal{B}_b$ と書き表す) と，各 $t\ge 0$ に対して，

$$P_tf(x):=\int_E f(y)p_t(x,dy),\quad x\in E$$

は $\mathcal{B}_b$ から $\mathcal{B}_b$ への正値線形作用素となる．$\{P_t\}$ は次の半群性を持つことから，M の**推移半群** (transition semigroup of M) と呼ぶことがある：

$$P_{s+t}f(x)=P_tP_sf(x),\quad x\in E,\ s,t>0,\ f\in\mathcal{B}_b. \tag{3.10}$$

また，Markov Resolvent 核 $R_\alpha(x,A)$ に対して，

$$R_\alpha f(x):=\int_E f(y)R_\alpha(x,dy),\quad \alpha>0,\ x\in E,\ f\in\mathcal{B}_b \tag{3.11}$$

と定めると, R_α は $\mathcal{B}_b$ から $\mathcal{B}_b$ への正値線形作用素となり，次の Resolvent 方程式を満たす:

$$R_\alpha f(x)-R_\beta f(x)+(\alpha-\beta)R_\alpha R_\beta f(x)=0,\quad x\in E,\ \alpha,\beta>0. \tag{3.12}$$

以下，E 上の関数 f は常に $f(\Delta)=0$ とおくことにより E_Δ 上の関数に拡張しておく．従って，$\mathcal{B}_b$ の元は，Δ で退化する $\mathcal{B}_\Delta$-可測な関数とみて，$\mathcal{B}_b$ は $\mathcal{B}_\Delta$ の部分空間とみなすことができる．

$\alpha>0$ とする．E 上で定義された普遍可測函数 u は，次の性質を持つとき α**-超過関数** (α-excessive function) と呼ばれる：

$$u(x)\ge 0,\qquad e^{-\alpha t}P_tu(x)\nearrow u(x),\quad \text{as}\ \ t\searrow 0,\quad x\in E. \tag{3.13}$$

0-超過関数は，単に**超過関数**と呼ぶ． $\mathcal{S}^\alpha$ を α-超過関数全体を表す．

命題 3.2 (i) 非負値の定数関数は α-超過である．

(ii) $\mathcal{S}^\alpha$ は凸錐集合である．すなわち， 任意の $u,v\in\mathcal{S}^\alpha,\ c\ge 0$ に対して，$u+v,\ cu\in\mathcal{S}^\alpha$ である．

(iii) $\{u_n\}\subset\mathcal{S}^\alpha$ に対して，$u_1\le u_2\le\cdots\le u_n\le\cdots$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}u_n\in\mathcal{S}^\alpha$ である．

(iv) $\mathcal{S}^\alpha=\displaystyle\bigcap_{\gamma>\alpha}\mathcal{S}^\gamma.$

(v) f を E 上の非負値の普遍可測函数とする．このとき，$u(x)=R_\alpha f(x),\ x\in E$ とおくと，$u\in\mathcal{S}^\alpha$ である．

Proof: (i)-(iv) は定義より明らか．従って，(v) のみを示す．f は非負値だから，Fubini-Tonelli の定理より

$$\begin{aligned}
e^{-\alpha t}P_tu(x)&=e^{-\alpha t}\int_E R_\alpha f(y)p_t(x,dy)=e^{-\alpha t}\int_E\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha s}P_sf(y)ds\Big)p_t(x,dy)\\
&=\int_0^\infty e^{-\alpha(s+t)}\Big(\int_E f(z)\int_E p_s(y,dz)p_t(x,dy)\Big)ds=\int_0^\infty e^{-\alpha(s+t)}\int_E f(z)p_{s+t}(x,dz)ds\\
&=\int_0^\infty e^{-\alpha(s+t)}P_{s+t}f(x)ds=\int_t^\infty e^{-\alpha s}P_sf(x)ds
\end{aligned}$$

が成り立つ．最右辺は $u(x)=R_\alpha f(x)$ より小さく $t\downarrow 0$ とすると，$u(x)$ に近づいていく．よって，$u=R_\alpha f$ は α-超過函数である． □

補題 3.4 $\alpha > 0$ とする．u を E 上の普遍可測で α-超過関数とする．このとき，適当な有界で非負値で有界な普遍可測関数列 $\{f_n\}$ が存在して，$R_\alpha f_n \nearrow u(x)$, as $n \to \infty$, $x \in E$ が成り立つ．

Proof: u を E 上の普遍可測函数, $\alpha > 0$ とする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$u_n(x) := u(x) \wedge n$, $x \in E$ とおくと，u_n は普遍可測函数であり，また (3.12) によって，$\beta > 0$ に対して，

$$R_{\alpha+\beta} u_n(x) - R_\alpha u_n(x) + \beta R_{\alpha+\beta} R_\alpha u_n(x) = 0; \qquad \beta R_{\alpha+\beta} u_n(x) = R_\alpha\big(\beta(u_n - \beta R_{\alpha+\beta} u_n)\big)(x), \quad x \in E. \tag{3.14}$$

ところで，u および 定数関数 n は α-超過関数であるから，

$$\beta R_{\alpha+\beta} u_n(x) = \beta \int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)t} P_t u_n(x) dt = \beta \int_0^\infty e^{-\beta t} \cdot \underset{\sim\sim\sim}{e^{-\alpha t} P_t u_n(x)} dt \le \beta \int_0^\infty e^{-\beta t} \underset{\sim\sim}{u_n(x)} dt = u_n(x)$$

が成り立つ．よって，$\gamma > \beta > 0$ に対して，

$$\beta R_{\alpha+\beta} u_n = \beta R_{\alpha+\gamma} u_n + (\gamma - \beta) R_{\alpha+\gamma}\big(\underset{\sim\sim\sim}{\beta R_{\alpha+\beta} u_n}\big) \le \beta R_{\alpha+\gamma} u_n + (\gamma-\beta) R_{\alpha+\gamma} \underset{\sim}{u_n} = \gamma R_{\alpha+\gamma} u_n.$$

よって，単調収束定理によって，

$$\beta R_{\alpha+\beta} u \le \gamma R_{\alpha+\gamma} u$$

が成り立ち，さらに $\beta \mapsto \beta R_{\alpha+\beta} u$ は単調増加であることがわかる．

再び，Resolvent 方程式 (3.12) により

$$R_{\alpha+\beta} u_n = R_\alpha\big(u_n - \beta R_{\alpha+\beta} u_n\big), \quad \beta > 0$$

が成り立ち，さらに $u_n - \beta R_{\alpha+\beta} u_n$ は有界で非負値普遍可測だから，命題 3.2 (v) によって，$\beta R_{\alpha+\beta} u_n$ は α-超過関数となる．一方，$\beta \mapsto \beta R_{\alpha+\beta} u_n$ は単調増加であるから，その極限 (g_n とおく) も α-超過である．$\beta R_{\alpha+\beta} u_n$ は n に関しても単調増加であることから，g_n は (n に関して) 単調増加である．よって，その極限 (g とおく) も α-超過関数となる．明らかに $g_n \le u_n$ が成り立つから，$g \le u$ である．ところで，各 $\beta > 0$ に対して，単調収束定理により，

$$g \ge \lim_{n\to\infty} \beta R_{\alpha+\beta} u_n = \beta R_{\alpha+\beta} u$$

である．よって，

$$\beta R_{\alpha+\beta} u = \beta \int_0^\infty e^{-(\beta+\alpha)t} P_t u dt \overset{\beta t = s}{=} \int_0^\infty e^{-s}\big(e^{-\alpha(s/\beta)} P_{s/\beta} u\big) ds$$

において，$\beta \to 0$ とすると，u の α-超過性と Lebesgue の収束定理を用いると，

$$\lim_{\beta\to\infty} \beta R_{\alpha+\beta} u = \int_0^\infty e^{-s} u ds = u$$

となることから，$g \ge u$ が成り立つ．ゆえに $u = g$ である．よって，$\beta R_{\alpha+\beta} u_n$ は β に関しても n に関しても単調増大で，$n \to \infty$ としたあとに $\beta \to \infty$ とした極限 (u) と，$\beta \to \infty$ としたあと $n \to \infty$ とした極限 (g) は等しくなるから，$\beta = n$ とおくと，$n R_{\alpha+n} u_n = R_\alpha\big(n(u_n - n R_{\alpha+n} u_n)\big)$ は $n \to \infty$ とすると u に単調に近づく．ゆえに，$f_n = n\big(u_n - n R_{\alpha+n} u_n\big)$ とおけば，これが求めるものである． □

f を E 上の非負値普遍可測函数, σ を $\{\mathscr{F}_t\}$-停止時間とする．このとき，$\sigma(\omega) < \infty$ とするとき，

$$\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t} f(X_t) dt = e^{-\alpha\sigma} \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_{t+\sigma}) dt = e^{-\alpha\sigma}\Big\{\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t) dt\Big\} \circ \theta_\sigma$$

が成り立つ．また，$f(\Delta) = 0$ であるから，$\sigma(\omega) = \infty$ のときも上記の変形は成立する．よって，強 Markov 性により

$$\mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma} R_\alpha f(X_\sigma)\big] = \mathbb{E}_x\Big[\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t} f(X_t) dt\Big] \tag{3.15}$$

が成り立つ．よって，このことと，先の補題を組み合わせると，任意の α-超過関数 u に対して，

$$\mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma} u(X_\sigma)\big] \le u(x) \tag{3.16}$$

が任意の $\{\mathscr{F}_t\}$-停止時間 σ に対して成り立つ．また,

$$H_B^\alpha u(x) = \int_E u(y) H_B^\alpha(x, dy) = \mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma_B} u(X_{\sigma_B})\big], \quad \alpha > 0,\ x \in E,\ B \in \mathcal{B}^n \tag{3.17}$$

と定義すると，$H_B^\alpha u$ は α-超過関数となる．ただし，H_B^α は α-位の到達分布 (α-order hitting distribution) を表す：

$$H_B^\alpha(x, A) := \mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma_B} I_A(X_{\sigma_B})\big], \quad \alpha > 0,\ x \in E,\ A \in \mathcal{B}. \tag{3.18}$$

特に，α-位の到達確率は,

$$p_B^\alpha(x) := \mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma_B}\big], \quad \alpha > 0,\ x \in E,\ A \in \mathcal{B}^n \tag{3.19}$$

として定義され，p_B^α は α-超過関数となる．実際，$t > 0$ に対して，$t + \sigma_B \circ \theta_t \geq \sigma_B$ であり，$t \downarrow 0$ ならば$t + \sigma_B \circ \theta_t \downarrow \sigma_B$ より,

$$\begin{aligned} &e^{-\alpha t} P_t p_B^\alpha(x) = \mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha t}\mathbb{E}_{X_t}[e^{-\alpha\sigma_B}]\big] = \mathbb{E}_x\Big[e^{-\alpha\left(t + \sigma_B \circ \theta_{\sigma_B}\right)}\Big] \leq \mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma_B}\big], \\ &\lim_{t \downarrow 0} e^{-\alpha t} P_t p_B^\alpha(x) = \lim_{t \downarrow 0} \mathbb{E}_x\Big[e^{-\alpha\left(t + \sigma_B \circ \theta_{\sigma_B}\right)}\Big] \nearrow \mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma_B}\big] = p_B^\alpha(x). \end{aligned}$$

次に，u を有界な $\mathcal{B}^n$-可測な α-超過関数とし，$B = \{y \in E:\ u(y) > a\}$ とおく．いま，$u(x) < a$ を満たす点 x をとると，(3.16) より，任意のコンパクト集合 K $(\subset B)$ に対して,

$$a\mathbb{E}_x[e^{-\alpha\sigma_K}] \leq H_K^\alpha u(x) \leq u(x)$$

が成り立つ．よって，定理 3.2(i) により，$a\mathbb{E}_x[e^{-\alpha\sigma_B}] \leq u(x) < a$ が，従って，$\mathbb{E}_x[e^{-\alpha\sigma_B}] < 1$ となる．ゆえに，$x \notin B^r$ である．

次に，$B = \{y \in E:\ u(y) < a\}$ とおいて $u(x) > a$ を満たす点 x をとると，補題 3.4 より，適当な E 上の非負値，普遍可測関数 f で，$a < R_\alpha f(x),\ R_\alpha f \leq u$ を満たすものが存在する．(3.15) 及び定理 3.2(i) によって,

$$a < \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\sigma_B} f(X_t)dt\Big] + a\mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma_B}\big]$$

が成り立つことから，x は B の非正則点でなければならない． まとめると,

$$\big\{y \in E:\ u(y) > a\big\}^r \subset \{y \in E:\ u(y) \geq a\}, \qquad \big\{y \in E:\ u(y) < a\big\}^r \subset \{y \in E:\ u(y) \leq a\} \tag{3.20}$$

が任意の $a > 0$ について成立する．

補題 3.5 $\alpha \geq 0$ とする．u を E 上の有界な概 Borel 可測な α-超過関数とする．このとき，任意の $x \in E$ に対して，写像 $t \mapsto u(X_t)$ は，$[0, \infty)$ において右連続，かつ $(0, \infty)$ において E 内に左極限を $\mathbb{P}_x$-a.s で持つ．

Proof: 各 $k \in \mathbb{N}$ 及び $x \in E$ に対して，$B := B_k(x) := \{y \in E:\ |u(y) - y(x)| > 1/k\}$ とおく，このとき，$\{\mathscr{F}_t\}$-停止時間の増加列 $\{\sigma_n^k\}_{n=0}^\infty$ を次のように定義する：

$$\sigma_0^k := 0, \quad \sigma_n^k := \sigma_{n-1}^k + \sigma_B \circ \theta_{\sigma_{n-1}^k},\ n \geq 1.$$

このとき，$B^r \subset \{y \in E : |u(y) - u(x)| \geq 1/k\}$ に注意すると,

$$\mathbb{P}_x\Big(\big|u(X_{\sigma_B}) - u(X_0)\big| \geq \frac{1}{k},\ \sigma_B < \infty\Big) = \mathbb{P}_x\big(\sigma_B < \infty\big) \tag{3.21}$$

が定理 3.3 により成立する．

次に $\big\{e^{-\alpha\sigma_n^k} u\big(X_{\sigma_n^k}\big)\big\}_{n \geq 1}$ は $\big\{\mathscr{F}_{\sigma_n^k}, \mathbb{P}_x\big\}_{n \geq 1}$ に関して有界な supermartingale となることが分かる．実際，任意の $\Lambda \in \mathscr{F}_{\sigma_n^k}$ に対して，強 Markov 性と (3.16) により,

$$\mathbb{E}_x\Big[e^{-\alpha\sigma_{n+1}^k} u\big(X_{\sigma_{n+1}^k}\big); \Lambda\Big] = \mathbb{E}_x\Big[e^{-\alpha(\sigma_n^k + \sigma_B \circ \theta_{\sigma_n^k})} u\big(X_{\sigma_B}\big) \circ \theta_{\sigma_n^k}; \Lambda\Big]$$

$$= \mathbb{E}_x\Big[e^{-\alpha\sigma_n^k}\mathbb{E}_{X_{\sigma_n^k}}\big[e^{-\alpha\sigma_B}u(X_{\sigma_B})\big];\Lambda\Big] \le \mathbb{E}_x\Big[e^{-\alpha\sigma_n^k}u(X_{\sigma_n^k});\Lambda\Big]$$

が成り立つ．よって，supermartingale に対する収束定理により，$\mathbb{P}_x$-a.s について $\lim_{n\to\infty} e^{-\alpha\sigma_n^k}u(X_{\sigma_n^k})$ は収束する．

一方，(3.21) より $\big|u(X_{\sigma_{n+1}^k}) - u(X_{\sigma_n^k})\big| \ge 1/k$ が $\mathbb{P}_x$-a.s. で $\{\omega \in \Omega:\ \sigma_{n+1}^k(\omega) < \infty\}$ 上で成立することから，$\lim_{n\to\infty}\sigma_n^k = \infty$ が $\mathbb{P}_x$-a.s. で成立しなければならない．また，このことは，任意の $k \in \mathbb{N}$ について成立することから，補題の主張が得られることが分かる． □

上で示した補題は，u が概 Borel 可測で有界であることを仮定したが，実は関数が α-超過であるならば，概 Borel 可測であることと cadlag 性を示すことが出来るのである．それが次の述べる定理である．

定理 3.4 $\alpha \ge 0$ とする．u を普遍可測な，α-超過関数とする，このとき，u は概 Borel 可測であり，かつ 任意の $x \in E$ に対して，写像 $t \mapsto u(X_t)$ は $\mathbb{P}_x$-a.s. で，$(0,\infty)$ 上で右連続かつ E 内に左極限をもつ．

Proof: 一般性を失わず，u が有界であると仮定してよい．実際，u が有界でない普遍可測な α-超過関数とする．このとき，関数 $f:[0,\infty]\to[0,1]$ を

$$f(x) = 1 - e^{-x},\ x \in [0,\infty), \quad f(\infty) = 1$$

と定義すると，f は狭義単調増加な連続関数であり，かつ凹関数となる． よって，$0 \le x \le 1, y \ge 0$ に対して，$f(xy) \ge xf(y)$ が成り立つ． これらのことから，Jensen の不等式を用いると

$$\mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha t}f(u(X_t))\big] \le \mathbb{E}_x\big[f\big(e^{-\alpha t}u(X_t)\big)\big] \le f\Big(\mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha t}u(X_t)\big]\Big) = f\big(e^{-\alpha t}P_t u(x)\big) \le f\big(u(x)\big)$$

がすべての t について成立する． 次に，任意の $x \in E$ と $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\begin{aligned} A := A(x,\varepsilon) &:= \big\{y \in E:\ |f(u(y)) - f(u(x))| > \varepsilon\big\} \\ &= \big\{y \in E : u(y) > f^{-1}(f(u(x)+\varepsilon)\big\} \cup \big\{y \in E : u(y) < f^{-1}(f(u(x)-\varepsilon)\big\} \end{aligned}$$

とおく．すると A の正則点は $\big\{y \in E : |f(u(y)) - f(u(x))| \ge \varepsilon\big\}$ に含まれる．従って，特に $x \notin \big(A(x,\varepsilon)\big)^r$ である．よって，$\mathbb{P}_x\big(\sigma_A > 0\big) = 1$ より，$\mathbb{P}_x$-a.s. に対して $\lim_{t\to 0} f(u(X_t)) = f(u(X_0)) = f(u(x))$ が成り立つ．以上より，$f \circ u$ は有界な α-超過関数であることが分かる．

よって，$f \circ u$ が概 Borel 可測であれば，先の補題により $f \circ u(X_t)$ は cadlag 性をもつことが分かるから，u も cadlag 性を持つことが従う．

以下，u が概 Borel 可測となることを示す．補題 3.4 より，有界な普遍可測函数 f に対して，$u = R_\alpha f$ と表されている場合を示せば十分である． $\mu \in \mathcal{P}(E)$ を任意にとる．このとき，$(E,\mathcal{E})$ 上の測度を $\nu(B) := \int_E R_\alpha(x,B)\mu(dx),\ B \in \mathcal{B}$ と定める．f は有界な普遍可測函数より，有界な $\mathcal{B}$-可測な有界関数 f_1, f_2 が存在して，$f_1 \le f \le f_2,\ f_1 = f_2,\ \mu$-a.e. を満たす．従って，$f_1 = f_2,\ \nu$-a.e. が成り立つ．すると $R_\alpha f_1, R_\alpha f_2$ はともに $\mathcal{B}$-可測であり，$R_\alpha f_1 \le R_\alpha f \le R_\alpha f_2,\ \mu$-a.e. が成り立つ．さらに，

$$\begin{aligned} 0 \le \mathbb{E}_\mu\big[R_\alpha(f_2 - f_1)(X_t)\big] &= \int_E P_t R_\alpha(f_2 - f_1)(x)\mu(dx) \\ &\le e^{\alpha t}\int_E R_\alpha(f_2 - f_1)(x)\mu(dx) = e^{\alpha t}\int_E (f_2 - f_1)(x)\nu(dx) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つから，$R_\alpha f_1(X_t) = R_\alpha f_2(X_t),\ \mathbb{P}_\mu$-a.s. が $t \in [0,\infty)\cap\mathbb{Q}$ で成立する．一方，$R_\alpha f_i$ は $\mathcal{B}$-可測で α-超過関数であるから，補題により，任意の x に対して $R_\alpha f_i(X_t)$ は $\mathbb{P}_x$-a.s. で右連続である．従って，$\mathbb{P}_x(R_\alpha f_1(X_t) \ne R_\alpha f_2(X_t),\ \exists\, t \ge 0) = 0$ が成り立つ．ゆえに，$u = R_\alpha f$ は概 Borel 可測であることが示された． □

集合 $A \subset E$ が**極集合** (polar set) であるとは，$A \subset B$ であって $\mathbb{P}_x(\sigma_B < \infty) = 0,\ x \in E$ を満たすような $B \in \mathcal{B}$ が存在するときを言う．また，ある $B \in \mathcal{B}^n$ が存在して，$A \subset B$ かつ $B^r = \varnothing$ を満たすとき，A を**尖細集合** (thin set) と呼ぶ．次に A が**半極集合** (semipolar set) であるとは，適当な尖細集合の列 $\{A_n\}$ が存在して，$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ となるときを言う．明らかに極集合は半極集合である． しかし，逆は一般には言えない．

普遍可測集合 $A \subset E$ は，$R_\alpha(x, A) = 0,\ x \in E$ を満たすとき**ポテンシャル零集合** (sef of potential zero) と呼ばれる．

定理 3.5 (i) $B \in \mathcal{B}^n$ に対して，$B \setminus B^r$ は半極集合である．

(ii) A が半極集合ならば，任意の $x \in E$ に対して，集合 $\{t \geq 0 :\ X_t \in A\}$ は $\mathbb{P}_x$-*a.s.* で高々可算個の t の集合となる．特に，$A \subset B$ を満たすポテンシャル零集合 $B \in \mathcal{B}^n$ が存在する．

Proof: (i): 各 n について，$B_n = \{x \in B : p_B^1 < 1 - 1/n\}$ とおく．ただし，$p_B^1(x) = \mathbb{E}_x[e^{-\sigma_B}]$ である．このとき，$p_{B_n}^1(x) \leq p_B^1(x)$ より B_n^r は $\{x \in E :\ p_B^1(x) = 1\}$ に含まれる． しかし， p_B^1 は 1-超過関数であるから，(3.20) より，$p_B^1(x) = 1$ を満たす x は B_n^r には属さない．よって，$B_n^r = \varnothing$ である．ゆえに，B_n は尖細集合である．よって，$B \setminus B^r = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ は半極集合である．

(ii): A は尖細集合としてよい．このとき，$B \in \mathcal{B}^n$ を，$A \subset B$ かつ $B^r = \varnothing$ を満たすようにとる．次に各 n に対して，B_n を上のように定義して， 停止時刻の列 $\{\sigma_{n,k}\}$ を次のように定める：$\sigma_{n,1} = \sigma_{B_n}$，$\sigma_{n,k+1} = \sigma_{n,k} + \sigma_{B_n} \circ \theta_{\sigma_{n,k}}$．

$B_n^r = \varnothing$ だから，$\{\sigma_{n,k} < \infty\}$ においては，$X_{\sigma_{n,k}} \in B_n$ が $\mathbb{P}_x$-a.s. で成立する． よって，強 Markov 性により

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-\sigma_{n,k}}\right] = \mathbb{E}_x\left[e^{-\sigma_{n,k-1}} \mathbb{E}_{X_{\sigma_{n,k-1}}}\left[e^{-\sigma_{B_n}}\right]\right] \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbb{E}_x\left[e^{-\sigma_{n,k-1}}\right] \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k,$$

が成り立つことから， $\lim_{k\to\infty} \sigma_{n,k} = \infty$, $\mathbb{P}_x$-a.s. が分かる．また，$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ だから， $\sigma_{n,k} < t < \sigma_{n,k+1}$ を満たす任意の t に対しては $X_t \notin B_n$ だから，$\{t \geq 0 :\ X_t \in B\}$ は $\{\sigma_{n,k} :\ n \geq 1,\ k \geq 1\}$ に $\mathbb{P}_x$-a.s. で含まれることから，定理の主張が得られる．最後の主張は明らかである． □

集合 $A \subset E$ が**細開集合** (finely open set) であるとは，$E \setminus A$ が，A の各点に対して尖細集合となるときを言う．すなわち，各 $x \in A$ に対して，$B \supset E \setminus A$ を満たす集合 $B = B(x) \in \mathcal{B}^n$ で，$\mathbb{P}_x(\sigma_B > 0) = 1$ を満たすものが存在するときを言う．M の経路の右連続性により，任意の E の開集合は，細開集合であることが分かる．よって細開集合全体の集合を $\mathcal{O}_f$ と書くことにすると，$\mathcal{O}_f$ は E 上の位相となるが，これを**細位相** (fine topology) という．細位相は E の元の位相を含む．

定理 3.6 任意の概 Borel 可測函数 u が細連続であるための必要十分条件は，任意の $x \in E$ に対して，写像 $t \mapsto u(X_t)$ が $[0, \infty)$ において $\mathbb{P}_x$-*a.s.* で右連続であることである．従って，特に α-超過関数は細連続である．

Proof: 「特に」以降の主張は明らかである． まず，$t \mapsto u(X_t)$ が右連続であるとする．任意の $\beta_1 < \beta_2$ に対して，$A = \{x \in E :\ \beta_1 < u(x) < \beta_2\}$ とおく．すると，右連続性の仮定により $\mathbb{P}_x(\sigma_{E\setminus A} > 0) = 1$ が任意の $x \in A$ に対して成立する．よって，$B = E \setminus A\,(\in \mathcal{B})$ と置くことにより，A は細開集合であることが分かる．ゆえに，u は細連続となる．

逆に，概 Borel 可測函数 u を細連続とする．任意の $q \in \mathbb{Q}$ に対して，$A_q = \{x \in E :\ u(x) < q\}$ とおくと，A_q は概 Borel 集合かつ細開集合である．$p_{A_q}^1(x) = \mathbb{E}_x[e^{-\sigma_{A_q}}]$ は 1-超過関数であるから，定理 3.4 より，$t \mapsto p_{A_q}^1(X_t)$ は右連続であることが分かる．

$$\Omega_0 := \left\{\omega \in \Omega :\ \text{任意の } q \in \mathbb{Q} \text{ に対して，} t \mapsto p_{A_q}^1(X_t(\omega)) \text{ が } [0, \infty) \text{ において右連続となる}\right\}$$

すると $\mathbb{P}_x(\Omega_0^c) = 0$ である．このとき，任意の $\omega \in \Omega_0$ に対して，$t \mapsto u(X_t)$ が $[0, \infty)$ において右連続となることを示せば定理の証明は終わる．

そこで，ある $\omega \in \Omega_0$ に対して $t \mapsto u(X_t(\omega))$ が右連続ではないと仮定する．すると，適当な $t \geq 0$ が存在して，$\limsup_{s\downarrow t} u(X_t(\omega)) < u(X_t(\omega))$，または $\liminf_{s\downarrow t} u(X_t(\omega)) > u(X_t(\omega))$ が成り立つ．$\limsup_{s\downarrow t} u(X_t(\omega)) < u(X_t(\omega))$ が成り立つと仮定すると，適当な $q \in \mathbb{Q}$ と点列 $\{t_n\}$ が存在して，$t_n > t_{n+1} > t$, $t_n \to t\ (n \to \infty)$, $\lim_{n\to\infty} u(X_{t_n}(\omega)) <$

$q < u(X_t(\omega))$ が成り立つ．このような q と $\{t_n\}$ に対して，十分大きい n について，$X_{t_n}(\omega)$ は細開集合 A_q に属することが分かるから，$p^1_{A_q}(X_{t_n}(\omega)) = 1$ である．したがって，$t \mapsto p^1_{A_q}(X_t(\omega))$ の右連続性により，$p^1_{A_q}(X_t(\omega)) = \lim_{n\to\infty} p^1_{A_q}(X_{t_n}(\omega)) = 1$ が成り立つ．よって，$X_t(\omega)$ は A_q の正則点の集合に属する．しかし，これは $\{x \in E:\ q < u(x)\}$ は細開集合であることから，$q < u(X_t(\omega))$ に矛盾することになる．

$\liminf_{s\downarrow t} u(X_t(\omega)) > u(X_t(\omega))$ の場合についても同じように矛盾を示すことが出来る． □

M を Hunt 過程とする．$\tilde{E} \subset E$ を概 Borel 集合とする．$\tilde{E}$ が **M-不変** (M-invariant) であるとは,

$$\widetilde{\Omega} := \Big\{\omega \in \Omega:\ X_t(\omega) \in \tilde{E}_\Delta,\ X_{t-}(\omega) \in \tilde{E}_\Delta,\ t \geq 0\Big\} \tag{3.22}$$

とおくとき，任意の $x \in \tilde{E}_\Delta$ に対して， $\mathbb{P}_x(\widetilde{\Omega}) = 1$ を満たすときをいう．

ここで，$\widetilde{\Omega} = \{\dot{\sigma}_{E\setminus\tilde{E}} = \infty,\ \hat{\sigma}_{E\setminus\tilde{E}} = \infty\}$ と書けることから Ω_0 は $\mathscr{F}_\infty$ の元であることがわかる．M-不変な概 Borel 集合 $\tilde{E}$ に対して,

$$\mathsf{M}\big|_{\tilde{E}} := \Big(\widetilde{\Omega},\ \mathcal{M} \cap \widetilde{\Omega},\ \{X_t\}_{t\in[0,\infty]},\ \big\{\mathbb{P}_x\big\}_{x\in\tilde{E}}\Big)$$

とおいて，これを **Hunt 過程 M の $\tilde{E}$ への制限**と呼ぶ.

定理 3.7 Borel 集合 $\tilde{E} \subset E$ が M-不変ならば，M の $\tilde{E}$ への制限 $\mathsf{M}\big|_{\tilde{E}}$ は $(\tilde{E}, \mathcal{B}(\tilde{E}))$ を状態空間とする Hunt 過程となる．

Proof: $\tilde{E}$ を M-不変な Borel 集合とするとき，$\mathsf{M}\big|_{\tilde{E}}$ に対して，(M.1)-(M.6) が成立するのは簡単に示せる．強 Markov 性が問題である．そこで，$\mu \in \mathcal{P}(\tilde{E}_\Delta)$ を任意にとると，μ は $\mathcal{P}(E_\Delta)$ の元とみなせることに注意しておく．$\widetilde{\mathscr{F}}^0_t = \mathscr{F}^0_t \cap \widetilde{\Omega}$, $\widetilde{\Omega} \in \mathscr{F}^\mu_\infty$ および $\mathbb{P}_\mu(\widetilde{\Omega}) = 1$ であることから，$\widetilde{\mathscr{F}}^\mu_t = \mathscr{F}^\mu_t \cap \widetilde{\Omega} \subset \mathscr{F}^\mu_t$ である．よって，M に対する**強** Markov **性**が $\mathsf{M}\big|_{\tilde{E}}$ に対しても成立することがわかる． □

3.3 対称推移関数と除外集合

m を $(E, \mathcal{B})$ 上の台が E である正値 Radon 測度とする．このとき，Hunt 過程 M の推移関数 $\{p_t\}$, または推移半群 $\{P_t\}$ が ***m*-対称**であるとは,

$$\int_E u(x)P_t v(x)m(dx) = \int_E P_t u(x)v(x)m(dx) \quad \big(\leq \infty\big) \tag{3.23}$$

が，任意の非負値の $\mathcal{B}$-可測函数 u, v および $t \geq 0$ に対して成立するときをいう．このとき，(3.11) で定義される Resolvent 作用素 $\{R_\alpha\}$ も m-対称であることがわかる：

$$\int_E u(x)R_\alpha v(x)m(dx) = \int_E R_\alpha u(x)v(x)m(dx) \quad \big(\leq \infty\big), \quad u, v \in \mathcal{B},\ u, v \geq 0,\ \alpha > 0. \tag{3.24}$$

ここで，p_t と R_α はともに $(E, \mathcal{B}^*)$ 上の Markov 核に一意的に拡張されることに注意する．このとき，$f \in L^2(X; m) \cap \mathcal{B}^*$ に対して,

$$\begin{aligned}
\int_E \big(p_t f(x)\big)^2 m(dx) &= \int_E \Big(\int_E f(y)p_t(x, dy)\Big)^2 m(dx) \\
&\leq \int_E \Big(\int_E f(y)^2 p_t(x, dy) \int_E 1^2 p_t(x, dy)\Big) m(dx) \\
&\leq \int_E p_t f^2(x)m(dx) = \int_E f^2(x)p_t 1(x)m(dx) \leq \int_E f^2(x)m(dx)
\end{aligned}$$

となることから， $\{p_t : t > 0\}$ は $L^2(E; m)$ 上の縮小的な半群としても拡張されることがわかる．

さて $f \in C_b(E)$ に対して，(M.6) と (M.5) より,

$$\lim_{t\to 0+} p_t f(x) = \lim_{t\to 0+} \mathbb{E}_x\big[f(X_t)\big] = \mathbb{E}_x\big[f(X_0)\big] = f(x), \quad x \in E \tag{3.25}$$

が成り立つ.

命題 3.3 M を $(E, \mathcal{B})$ を状態空間とする Hunt 過程とし，$\{p_t : t > 0\}$ を $(E, \mathcal{B})$ または $(E, \mathcal{B}^*)$ 上の m-対称な Markov 推移関数する．このとき，$\{T_t : t > 0\}$ を $\{p_t : t > 0\}$ を $L^2(E; m)$ 上に拡張した縮小的な半群とする．このとき，$\{T_t : t > 0\}$ は $L^2(E; m)$ 上の強連続となる．従って，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \Big\{ u \in L^2(E; m) : \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(u - T_t u, u) < \infty \Big\} \\ \mathcal{E}(u, v) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(u - T_t u, v), \quad u, v \in \mathcal{F}\end{aligned}$$

とおくと，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は $L^2(E; m)$ 上の Dirichlet 形式となる．

Proof: $C_0(E)$ は $L^2(E; m)$ において稠密である．また，各 $f \in C_0(E)$ に対して，(3.25) より $p_t f$ は f に $L^2(E; m)$ 収束することがわかる．実際，収束定理により

$$\begin{aligned}\int_E \big(p_t f(x) - f(x)\big)^2 m(dx) &= \int_E \big((p_t f(x))^2 - 2f(x)p_t f(x) + (f(x))^2\big) m(dx) \\ &\le 2\int_E \big((f(x))^2 - f(x)p_t f(x)\big) m(dx) \to 0 \ \text{ as } \ t \to 0+ .\end{aligned}$$

□

$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を M または $\{p_t : t > 0\}$ によって定まる Dirichlet 形式と呼ぶ．以下，$\{p_t\}$ は $(E, \mathcal{B}^*)$ 上の m-対称な Hunt 過程 M の推移関数とする．

補題 3.6 $A \in \mathcal{B}^*$ に対して，以下の条件はすべて同値である．

(i) $m(A) = 0$;

(ii) $p_t(x, A) = 0,\ m\text{-a.e.},\ x \in E,\ t > 0$;

(iii) $R_\alpha(x, A) = 0,\ m\text{-a.e.},\ x \in E,\ \alpha > 0$.

Proof: (i)⇒(ii)⇒(iii) は明らかである．実際，$m(A) = 0$ とすると，任意の $t > 0$ に対して，$\{p_t\}$ の m-対称性により

$$\int_E p_t(x, A) m(dx) = \int_E P_t 1_A(x) m(dx) = \int_E P_t 1_E(x) 1_A(x) m(dx) = \int_A P_t 1_E(x) m(dx) = 0.$$

一方，(ii) を仮定すると，任意の $t > 0$ に対して，$\int_E p_t(x, A) m(dx) = 0$ である．Fubini の定理により，

$$0 = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \int_E p_t(x, A) m(dx) dt = \int_E \Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t} p_t(x, A) dt \Big) m(dx) = \int_E R_\alpha(x, A) m(dx).$$

最後に (iii)⇒(i) を示す．$\{R_\alpha\}$ の m-対称性により，

$$0 = \alpha \int_E R_\alpha(x, A) m(dx) = \alpha \int_E R_\alpha 1_A(x) m(dx) = \alpha \int_A R_\alpha 1_E(x) m(dx)$$

ここで，

$$\alpha R_\alpha 1_E(x) = \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} p_t(x, E) dt = \int_0^\infty e^{-t} p_{t/\alpha}(x, E) dt$$

および，M の右連続性と正規性 (M.5) によって，有界収束定理から

$$0 = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha \int_E R_\alpha(x, A) m(dx) = \lim_{\alpha \to \infty} \int_0^\infty e^{-t} \int_A p_{t/\alpha}(x, E) m(dx) dt = m(A) \int_0^\infty e^{-t} dt = m(A).$$

□

上の補題から，ポテンシャル零な普遍可測集合は m に関して零集合であることが分かる．ところで，前節において確率論的な "除外集合" として，極集合・半極集合・ポテンシャル零集合を定義した．ここで，もう一つ紹介しておく．集合 $N \subset E$ が**除外集合** (exceptional set) であるとは，適当な $\tilde{N} \in \mathcal{B}^n$ が存在して，$\tilde{N} \supset N$ かつ $\mathbb{P}_m(\sigma_{\tilde{N}} < \infty) = 0$ が

成り立つときをいう．但し，$\mathbb{P}_m(\Lambda) := \int_E \mathbb{P}_x(\Lambda)m(dx),\ \Lambda \in \mathscr{F}_\infty$ である．特に，概 Borel 集合の定義により，$\tilde{N}_1 \supset \tilde{N}$ かつ $\mathbb{P}_m(\sigma_{\tilde{N}_1} < \infty) = 0$ を満たす $\tilde{N}_1 \in \mathcal{B}$ が存在することが分かる．従って，任意の除外集合は m に関する零集合となる．実際，N を除外集合となる $\mathcal{B}$ の元とすると $p_t(x, N) = 0,\ m$-a.e. $x \in E$ がすべての $t \geq 0$ について成り立つから，上の補題によって $m(N) = 0$ である． また，除外集合の可算和もまた除外集合となる．

次に，集合 $N \subset E$ が**適切除外集合** (properly exceptional set) であるとは，$N \in \mathcal{B}^n,\ m(N) = 0$ であって，$E \setminus N$ が M-不変集合となるときを言う．

補題 3.7 $n \in \mathbb{N}$ とする．このとき，任意の $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ と $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{B}_+$ に対して，

$$\mathbb{E}_m\Big[f_0(X_0)f_1(X_{t_1})\cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}})f_n(X_{t_n})\Big] = \mathbb{E}_m\Big[f_n(X_0)f_{n-1}(X_{t_n-t_1})\cdots f_1(X_{t_n-t_1})f_0(X_{t_n})\Big]$$

が成り立つ．ただし，$\mathbb{E}_m[\cdot]$ は Ω 上の測度 $\mathbb{P}_m(\cdot) := \int_E \mathbb{P}_x(\cdot)m(dx)$ に関する積分を表す．

Proof: 帰納法で示す．上の式が n について成立するものとする．このとき，Markov 性と帰納法の仮定を用いると

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_m\Big[f_0(X_0)f_1(X_{t_1})\cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}})f_n(X_{t_n})f_{n+1}(X_{t_{n+1}})\Big] \\
&\quad = \mathbb{E}_m\Big[f_0(X_0)f_1(X_{t_1})\cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}})\big(f_n \cdot p_{t_{n+1}-t_n}f_{n+1}\big)(X_{t_n})\Big] \\
&\quad = \mathbb{E}_m\Big[\big(f_n \cdot p_{t_{n+1}-t_n}f_{n+1}\big)(X_0)f_{n-1}(t_n - t_{n-1})\cdots f_1(X_{t_n-t_1})f_0(X_{t_n})\Big] \\
&\quad = \int_E p_{t_{n+1}-t_n}f_{n+1}(x)\mathbb{E}_x\Big[f_n(X_0)f_{n-1}(X_{t_n-t_{n-1}})\cdots f_1(X_{t_n-t_1})f_0(X_{t_n})\Big]m(dx)
\end{aligned}$$

が成立するが，最後の式は m-対称性と再び Markov 性により，

$$\begin{aligned}
&\int_E f_{n+1}(x)\mathbb{E}_x\Big[\mathbb{E}_{X_{t_{n+1}-t_n}}\Big[f_n(X_0)f_{n-1}(X_{t_n-t_{n-1}})\cdots f_1(X_{t_n-t_1})f_0(X_{t_n})\Big]\Big]m(dx) \\
&\quad = \mathbb{E}_m\Big[f_{n+1}(X_0)f_n(X_{t_{n+1}-t_n})f_{n-1}(X_{t_{n+1}-t_{n-1}})\cdots f_1(X_{t_{n+1}-t_1})f_0(X_{t_{n+1}})\Big]
\end{aligned}$$

となり，$n+1$ に対しても成立することが分かった． □

$x \in E$ に関する主張が適当な除外集合を除いたすべての点で成立するとき，**その主張は** quasi everywhere, **または** q.e. **で成立する**という．q.e. の点で定義された関数 u が, **細連続** q.e. (finely continuous q.e.) であるとは，適当な除外集合 $N \in \mathcal{B}^n$ が存在して，$E \setminus N$ は細開集合かつ u は $E \setminus N$ 上の概 Borel 可測函数であって，さらにその上で細連続となるときを言う．

補題 3.8 A を概 Borel の細開集合とする．このとき，$m(A) = 0$ ならば A は除外集合となる．

Proof: $K \subset A$ をコンパクト集合とする．K 上の α-位の到達分布 (3.18) に対して，

$$R_\alpha f(x) = R_\alpha^0 f(x) + H_K^\alpha R_\alpha f(x), \quad x \in E,\ f \in \mathcal{B},\ f \geq 0 \tag{3.26}$$

が成り立つ．但し，$\{R_\alpha^0, \alpha > 0\}$ は，Markov 推移関数 $p_t^0(x, A) = \mathbb{P}_x\big(X_t \in A,\ t < \sigma_K\big),\ x \in E,\ A \in \mathcal{B}$ に対応する Resolvent である:

$$R_\alpha^0(x, A) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}p_t^0(x, A)dx = \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\sigma_K} e^{-\alpha t}1_A(X_t)dt\Big]. \tag{3.27}$$

ここで，$\{p_t^0, t > 0\}$ は m-対称であることがわかるから，$\{R_\alpha^0, \alpha > 0\}$ も m-対称であることもわかる．したがって，(3.26) により

$$\int_E f(x)H_K^\alpha R_\alpha g(x)m(dx) = \int_E g(x)H_K^\alpha R_\alpha f(x)m(dx) \tag{3.28}$$

が任意の非負値普遍可測函数 f, g に対して成立することもわかる． よって，$f \in C_0(E),\ f \geq 0,\ g(x) = 1_A(x)$ とおくと，

$$\int_E f(x)H_K^\alpha R_\alpha 1_A(x)m(dx) = \int_A H_K^\alpha R_\alpha f(x)m(dx) = 0$$

が成り立つ．よって，$H_K^\alpha R_\beta 1_A(x)=0,\ \beta>\alpha,\ m$-a.e. $x\in E$ となる．ところで，定理3.3より，到達分布 $H_K^\alpha(x,\bullet)=\mathbb{E}_x[e^{-\alpha\sigma_K}1_\bullet(X_{\sigma_K})]$ の台は K に含まれている．また $\lim_{\beta\to\infty}\beta R_\beta 1_A(y)=1,\ y\in K\subset A$ が成り立つことから，

$$H_K^\alpha 1_A(x)=H_K^\alpha 1(x)=\mathbb{E}_x[e^{-\alpha\sigma_K}]=0,\quad m\text{-a.e.}$$

が言える．このことから，K は除外集合であることがわかる．

次に，$\int_E h(x)m(dx)=1$ をみたす至る所正である関数 h をとる．すると，定理 3.2 により，$K_n\subset A$ を満たす，適当な単調増加なコンパクト集合列 $\{K_n\}$ で，

$$\mathbb{E}_{h\cdot m}\big[e^{-\alpha\sigma_A}\big]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_{h\cdot m}\big[e^{-\alpha\sigma_{K_n}}\big]=0$$

を満たすものが存在することから，A は除外集合となることがわかる．

□

補題 3.9 u を細連続 q.e. である関数とし，適当な細開集合 $A\in\mathcal{B}^n$ が存在して $u(x)\geq 0,\ m$-*a.e.* $x\in A$ が成り立つとする．このとき，$u(x)\geq 0$, q.e. $x\in A$ となる．

Proof: N を，$E\setminus N$ が細開集合であって，かつ $E\setminus N$ 上で u は概 Borel 可測函数であり，さらにその上で細連続となるような除外集合とする．$B=\{x\in A\setminus N:\ u(x)<0\}$ とおくと，B は概 Borel 集合であり，かつ細開集合であって，仮定により m に関して零集合となる． すると，補題 3.8 より B は除外集合となることが分かる．

□

定理 3.8 N を除外集合とすると，N を含む適当な適切除外集合 B が存在する．さらに，B は Borel 集合として取ることが出来る．

Proof: N を除外集合とすると，$p_{B_0}(x):=\mathbb{P}_x(\sigma_{B_0}<\infty)=0,\ m$-a.e. $x\in E$ を満たす概 Borel 集合 $B_0\supset N$ が存在する．よって，補題 3.9 より $p_{B_0}=0$, q.e. となる．すなわち，適当な概 Borel の除外集合 B_1 が存在して，$p_{B_0}(x)=0,\ x\in E\setminus B_1$．次に，$B_0\cup B_1$ は概 Borel の除外集合であるから，$p_{B_0\cup B_1}$ に対して，同じ議論を行うと，適当な適当な概 Borel の除外集合 B_2 が存在して，$p_{B_0\cup B_1}(x)=0,\ x\in E\setminus B_2$ とできる．以下，帰納的に同じ議論を繰り返すことにより，適当な概 Borel の除外集合列 $\{B_k\}_{k=0}^\infty$ が存在して，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，$p_{\cup_{k=0}^n B_k}(x)=0,\ x\in E\setminus B_{n+1}$ となる． よって，$B=\bigcup_{k=0}^\infty B_k$ とおくと，B は概 Borel の除外集合であり，$p_B(x)=0,\ x\in E\setminus B$ が成り立つことが分かる．

一方，定理 3.1 より，$p_B(x)=\mathbb{P}_x\big(X_t\in B \text{ or } X_{t-}\in B,\ \exists t\geq 0\big),\ x\in X\setminus B$ であることに注意すると，$E\setminus B$ は M-不変であることから，B は適切除外集合である．あとは，各 B_k が概 Borel 集合であることの定義を用いることにより，B_k を含む Borel の除外集合が取れることに注意すれば，B として Borel 集合を取ることが出来る．

□

補題 3.10 有界な関数 u が細連続 q.e. であるための必要十分条件は，適当な適切除外集合である Borel 集合 B が存在して，u は $E\setminus B$ 上で Borel 可測な細連続関数となることである．

Proof: 細連続 q.e. の定義に現れる概 Borel な除外集合を N とする．有界収束定理により $\lim_{n\to\infty}nR_nu(x)=u(x),\ x\in E\setminus N$ が成り立つ．ここで，u を $u(x)=0,\ x\in N$ とおくことにより u の定義域を E 全体に拡げておく．すると，u は E 上の概 Borel 可測函数となることから，Borel 関数 u_1,u_2 を選んで，$u_1(x)\leq u(x)\leq u_2(x),\ x\in E$ かつ $u_1(x)=u_2(x),\ m$-a.e. $x\in E$ とできる．$\{R_n\}$ の m-対称性によって，$R_nu_1=R_nu_2,\ m$-a.e. である．定理 3.6 より R_nu_i は細連続であるから，補題 3.9 によって $R_nu_1=R_nu_2$, q.e. となることが分かる．このとき，各 n に対して，B_n を N を含む対応する除外集合とする．さらに， Borel 集合 B を定理 3.8 による，除外集合 $\bigcup_{n=1}^\infty B_n$ を含む適切除外集合とすると，$x\in E\setminus B$ に対して $\lim_{n\to\infty}nR_nu_1(x)=u(x)$ が得られるから，u の $E\setminus B$ 上での Borel 可測性がわかる．

□

補題 3.11 $\alpha\geq 0$ とする．$\{u_n\}$ を単調減少な α-超過関数とし，その極限を u とする．このとき，$u=0$ m-*a.e.* ならば $u=0$ q.e. が成り立つ．

Proof: $\varepsilon > 0$ に対して，K を $\{x \in E : u(x) \geq \varepsilon\}$ に含まれる任意のコンパクト集合とする．このとき， $H_K^\alpha u_n(x) \leq u_n(x)$ より，$u(x) < \infty$ を満たす x については $H_K^\alpha u(x) \leq u(x)$ が成り立つ．よって， $u(x) = 0$ ならば,

$$0 = u(x) \geq H_K^\alpha u(x) \geq \varepsilon p_K^\alpha(x) = \varepsilon \mathbb{E}_x[e^{-\alpha\sigma_K}],$$

従って，$p_K^\alpha(x) = 0$ が成り立つ．よって，$u(x) = 0$ m-a.e. だから，K は除外集合となることがわかる．定理 3.2 により概 Borel 集合 $\{u > 0\}$ は除外集合となる．

□

さて，この節の最後に，Hunt 過程の推移関数に対称性があれば，半極集合が除外集合となる，という結果を示す．そのために，まず (3.28) を拡張した公式を紹介する： 任意の概 Borel 集合 A, B に対して，

$$\int_E g(x) H_A^\alpha H_B^\alpha R_\alpha h(x) m(dx) = \int_E h(x) H_B^\alpha H_A^\alpha R_\alpha g(x) m(dx), \quad g, h \in \mathcal{B},\ g, h \geq 0 \tag{3.29}$$

が成立することがわかる．実際，(3.28) と R_α の m-対称性により，

$$\begin{aligned}
\int_E g(x) H_A^\alpha H_B^\alpha R_\alpha h(x) m(dx) &= \lim_{\beta\to\infty} \beta \int_E g(x) H_A^\alpha R_\beta H_B^\alpha R_\alpha h(x) m(dx) \\
&= \lim_{\beta\to\infty} \beta \int_E g(x) \underline{H_A^\alpha R_\alpha} \big(I - (\beta-\alpha) R_\beta\big) \utilde{H_B^\alpha R_\alpha} h(x) m(dx) \\
&= \lim_{\beta\to\infty} \beta \int_E h(x) \utilde{H_B^\alpha R_\alpha} \big(I - (\beta-\alpha) R_\beta\big) \underline{H_A^\alpha R_\alpha} g(x) m(dx) \\
&= \lim_{\beta\to\infty} \beta \int_E h(x) H_B^\beta H_A^\alpha R_\alpha g(x) m(dx) \\
&= \int_E h(x) H_B^\alpha H_A^\alpha R_\alpha g(x) m(dx)
\end{aligned}$$

である．一方，$K \subset G$ を満たす任意のコンパクト集合 K と開集合 G に対して，

$$H_G^\alpha p_K^\alpha(x) = p_K^\alpha(x), \quad m\text{-a.e.} \tag{3.30}$$

が成り立つことがわかる．実際，$\{\sigma_K < \infty\}$ において $X_{\sigma_K} \in K \subset G$, $\mathbb{P}_x$-a.s となることから，

$$H_K^\alpha H_G^\alpha h(x) = \mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma_K} \mathbb{E}_{X_{\sigma_K}}[e^{-\alpha\sigma_G} h(X_{\sigma_G})]\big] = \mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma_K} \mathbb{E}_{X_{\sigma_K}}[h(X_0)]\big] = \mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma_K} h(X_{\sigma_K})\big] = H_K^\alpha h(x)$$

となる．よって，補題 3.4 より，定数関数 1 を近似する有界な非負値 Borel 可測函数列 f_n，および任意の非負値可測函数 g に対して (3.28), (3.29) を適用し，$n \to \infty$ とすることにより

$$\int_E g(x) H_G^\alpha p_K^\alpha(x) m(dx) = \int_E g(x) p_K^\alpha(x) m(dx)$$

が成立することがわかることから (3.30) を得る．

定理 3.9 任意の半極集合は除外集合である．

Proof: K を任意のコンパクトな尖細集合とする．補題 3.9 の証明と同様の議論をすることにより，K が除外集合であることを示せば十分である．まず,

$$\mathbb{P}_x\big(\lim_{t\uparrow\sigma_K} p_K^\alpha(X_t) = 1,\ \sigma_K < \infty\big) = \mathbb{P}_x(\sigma_K < \infty), \quad m\text{-a.e. } x \in E \tag{3.31}$$

を示す．そのために，$\{G_n\}$ を単調減少な開集合列で

$$G_n \supset \bar{G}_{n+1}, \quad \bigcap_{n=1}^\infty G_n = K$$

を満たすものを考える．各 n に対して，$K \subset G_n$ であることから，(3.30) において強 Markov 性を用いることにより

$$\sigma_{G_n} + \sigma_K \circ \theta_{G_n} = \sigma_K, \quad \mathbb{P}_x\text{-a.s.}, \quad m\text{-a.e. } x \in E \tag{3.32}$$

が成り立つことが分かる．一方， K は尖細集合 (i.e., $K^r=\varnothing$) であるから

$$\mathbb{P}_x\big(\sigma_K<\infty,\ \sigma_{G_n}<\sigma_K,\ \forall n\big)=\mathbb{P}_x(\sigma_K<\infty),\quad m\text{-a.e. } x\in E$$

となる．実際，任意の n に対して $K\subset G_n$ より $\sigma_{G_n}\le\sigma_K$ が成立する．ところで，(3.32) より， $\sigma_K<\infty$ のとき，$K^r=\varnothing$ に注意すると $\sigma_K\circ\theta_{\sigma_{G_n}}>0$ でなければならないから，$\sigma_{G_n}<\sigma_K$ が $\{\sigma_K<\infty\}$ のとき，$\mathbb{P}_x$-a.s., m-a.e. $x\in E$ で成り立つ:

$$\mathbb{P}_x\big(\sigma_K<\infty,\ \sigma_{G_n}<\sigma_K,\ \forall n\in\mathbb{N}\big)=\mathbb{P}_x\big(\sigma_K<\infty\big),\quad m\text{-a.e. } x\in E. \tag{3.33}$$

一方，K はポテンシャル零集合だから，$m(K)=0$ である．よって，定理 3.2 より，

$$\mathbb{P}_x\Big(\lim_{n\to\infty}\sigma_{G_n}=\sigma_K\Big)=1,\quad m\text{-a.e. } x\in E$$

が成り立つ．p_K^α は α-超過関数より，$\big\{\,e^{-\alpha\sigma_{G_n}}p_K^\alpha\big(X_{\sigma_{G_n}}\big)\big\}_{n=1}^\infty$ は有界な supermartingale だから，$\lim_{n\to\infty}e^{-\alpha\sigma_{G_n}}p_K^\alpha\big(X_{\sigma_{G_n}}\big)$ が存在して，それは $e^{-\alpha\sigma_K}\lim_{n\to\infty}p_K^\alpha\big(X_{\sigma_{G_n}}\big)$ に一致する．よって，(3.30) により

$$\mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma_K}\big]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma_{G_n}}p_K^\alpha\big(X_{\sigma_{G_n}}\big)\big]=\mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma_K}\lim_{n\to\infty}p_K^\alpha\big(X_{\sigma_{G_n}}\big)\big].$$

これと (3.33) により，

$$\mathbb{P}_x(\sigma_K<\infty)=\mathbb{P}_x\Big(\sigma_K<\infty,\ \sigma_{G_n}<\sigma_K,\ \forall n,\ \lim_{n\to\infty}\sigma_{G_n}=\sigma_K,\ \lim_{n\to\infty}p_K^\alpha(X_{\sigma_{G_n}})=1\Big),\quad m\text{-a.e. } x\in E$$

が成り立つ．これは (3.31) を意味している．

次に，$B_n=\big\{x\in E:\ p_K^\alpha(x)\ge 1-1/n\big\}$ とおく．各 B_n は細閉集合であり，

$$\bigcap_{n=1}^\infty B_n=\big\{x\in E: p_K^\alpha(x)=\mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma_K}\big]=1\big\}=\{x\in E:\ \mathbb{P}_x\big(\sigma_K=0\big)=1\}=K^r=\varnothing$$

であるから，(3.31) から $\{\sigma_K<\infty\}$ 上 $\sigma_{B_n}<\sigma_K$, $\mathbb{P}_x$-a.e. m-a.e. $x\in E$ が成り立つことが分かる． よって，任意の $f\in\mathcal{B}_+$ に対して，

$$H_{B_n}^\alpha H_K^\alpha f=H_K^\alpha f,\quad m\text{-a.e.}$$

が成り立つことが分かり，これと (3.29) と (3.28) によって

$$(H_K^\alpha g,h)=(H_K^\alpha H_{B_n}^\alpha g,h) \tag{3.34}$$

となる． 次に，至るところ正であるような $h\in L^1(E;m)$ に対して，(3.34) は，測度 $\pi(A):=(H_K^\alpha 1_A,h)$ が各 B_n に集中することを意味するが，$\bigcap_{n=1}^\infty B_n=\varnothing$ であることから，$\pi=0$ となる．よって，$p_K^\alpha(x)=H_K^\alpha 1(x)=0$, m-a.e. となり，K が除外集合であることが示された． □

3.4 ポテンシャル概念の同定

M を $(E,\mathcal{B})$ を状態空間とする Hunt 過程として，その推移関数は m-対称とする．このとき，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を M により定まる Dirichlet 形式とする (命題 3.3).

補題 3.12 $O\subset E$ を $\mathrm{Cap}(O)<\infty$ を満たす開集合とするとき， p_O^1 は e_O の修正である：

$$p_O^1(x)=\mathbb{E}_x[e^{-\sigma_O}]=e_O(x),\quad m\text{-a.e.}$$

Proof; f を非負値の普遍可測関数で $L^2(E;m)$ の元ならば，p_tf は T_tf の修正である．特に，f が Hunt 過程の推移関数 $\{p_t:t>0\}$ に関する α-超過関数 (3.13) であれば，f は L^2 上の Markov 半群 $\{T_t:t>0\}$ に関する α-調和関数 (2.26) となる．

p^1_O は $\{p_t : t > 0\}$ に関する 1-超過関数であり，また $p^1_O(x) = 1,\ x \in O$ が成り立つから，補題 2.6 と補題 2.19 によって，

$$p^1_O(x) \leq e_O,\ m\text{-a.e.} \tag{3.35}$$

を示せば十分である．

いま，e_O の Borel 修正 $\tilde{e}_O$ で，$\tilde{e}_O(x) = 1,\ x \in O$ を満たすものをとり，

$$Y_t(\omega) := e^{-t}\tilde{e}_O(X_t(\omega)), \quad t \geq 0, \quad \omega \in \Omega$$

とおく． h を，$\int_E h(x)m(dx) = 1$ を満たす至る所正であるような Borel 関数とすると，$\{Y_t\}$ は $\{\mathscr{F}^0_t, \mathbb{P}_{hm}\}$ に関して supermartingale となることが分かる．実際，$0 < s < t$ に対して, Markov 性により

$$\mathbb{E}_{hm}\big[e^{-t}\tilde{e}_O(X_t)|\mathscr{F}^0_t\big] = e^{-t}\mathbb{E}_{X_s}[\tilde{e}_O(X_{t-s})] = e^{-s}e^{-(t-s)}p_{t-s}\tilde{e}_O(X_s), \quad \mathbb{P}_{hm}\text{-a.s.}$$

となるが，右辺は e_O が $\{T_t; t > 0\}$ に関して 1-超過であることから，$\mathbb{P}_{hm}$-a.s. で $e^{-s}\tilde{e}_O(X_s)$ 以下となる．

$D \subset (0,\infty)$ を有限集合，$\min D = a,\ \max D = b$ とし，$\sigma(D; O) := \inf\{t \in D :\ X_t \in O\}$ とおく．ただし，$X_t \in O$ となる $t \in D$ が存在しなければ，$\sigma(D; O) = b$ と約束する．supermartingale に関する任意抽出定理により

$$\mathbb{E}_{hm}\big[e^{-\sigma(D;O)}; \sigma(D; O) < b\big] \leq \mathbb{E}_{hm}\big[Y_{\sigma(D;O)}\big] \leq \mathbb{E}_{hm}[Y_a] \leq (h, \tilde{e}_O)$$

このとき，D を $D \uparrow (0, b) \cap \mathbb{Q}$ となるように近似し，その後，$b \uparrow \infty$ とすることにより，

$$(h, p^1_O) \leq (h, \tilde{e}_O)$$

を得る．よって，(3.35) が成立することが分かる． □

補題 3.13 $\{O_n\}$ を，各 n について $\mathrm{Cap}(O_n) < \infty$ を満たす単調減少な開集合列とする．

このとき，$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Cap}(O_n) = 0$ であることと

$$\lim_{n\to\infty} p^1_{O_n}(x) = 0, \quad m\text{-a.e.} \tag{3.36}$$

が成り立つことは同値である．

Proof: $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Cap}(O_n) = 0$ を仮定する．すると，前補題により，

$$\mathrm{Cap}(O_n) = \mathcal{E}_1(e_{O_n}, e_{O_n}) \geq \int_E (e_{O_n})^2 dm = \int_E (p^1_{O_n})^2 dm$$

より，(3.36) が成り立つ．

逆に (3.36) を仮定する．前補題により，e_{O_n} は m-a.e. に 0 に収束する．一方，仮定より $\mathrm{Cap}(O_1) \geq \mathrm{Cap}(O_n) = \mathcal{E}_1(e_{O_n}, e_{O_n})$ が成立するから， $\{e_{O_n}\}$ は $\mathcal{E}_1$ に関して有界である．よって，Banach-Steinhaus の定理および Banach-Saks の定理により適当な部分列の Cesaro 平均が $\mathcal{E}_1$ に関して強収束することが分かるから，それは L^2-収束する．従って，(3.36) より，部分列の Cesaro 平均の極限は 0 に収束するから， $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Cap}(O_n) = 0$ がわかる． □

補題 3.13 において，$\{p^1_{O_n}\}$ は，1-超過関数の単調減少列であることから，補題 3.11 より，(3.36) は q.e. に対して成り立つ，としても同じである．

定理 3.10 $\{F_k\}$ を閉集合の増大列とする．

(i) $\{F_k\}$ が強巣であるための必要十分条件は, ある n に対して $\mathrm{Cap}(E \setminus F_n) < \infty$ であって，

$$\mathbb{P}_x\Big(\lim_{k\to\infty} \sigma_{E\setminus F_k} < \infty\Big) = 0, \quad \text{q.e. } x \in E. \tag{3.37}$$

(ii) $\{F_k\}$ が巣であるための必要十分条件は

$$\mathbb{P}_x\Big(\lim_{k\to\infty}\sigma_{E\setminus F_k}<\zeta\Big)=0,\quad \text{q.e. } x\in E. \tag{3.38}$$

Proof: (i): 各 k に対して，$Ak=E\setminus F_k$ とおく．$p(x)=\lim_{k\to\infty}p^1_{A_k}(x),\ x\in E,$ とすれば，補題 3.13 により，$\{F_k\}$ が強巣であることと $p=0,\ m$-a.e となることとは同値であり，これはまた (3.37) が m-a.e. で成立することと同じである．よって，(i) の証明のためには $p=0$ m-a.e. から $p=0$ q.e. を導けばよい．

$\{A_k\}$ は開集合だから, $p^1_{A_k}(x)$ は補題 3.1 により x の Borel 可測あり，$p(x)$ も Borel 可測である．任意の $\varepsilon>0$ に対して, Borel 集合 $\{x\in E: p(x)\geq\epsilon\}$ のコンパクトな部分集合を K とする．H^1_K を (3.18) で定義される K の 1-次到達分布とすると，(3.16) より $H^1_K p^1_{A_k}\leq p^1_{A_k},\ k\geq 1$ だから，$k\to\infty$ として $H^1_K p\leq p$. これより $\varepsilon p^1_K(x)\leq p(x),\ x\in E$ が得られ，$p=0$ m-a.e. ならば K は除外集合となる．よって，集合 $\{p\geq\varepsilon\}$ が，従って，$\{p>0\}$ が容量零であることが分かる．

(ii): $\{F_k\}$ が巣であることは，任意の相対コンパクトな開集合 G に対して，開集合の減少列 $A_k=G\setminus F_k,\ k\geq 1,$ が $\lim_{k\to\infty}\mathrm{Cap}(A_k)=\lim_{k\to\infty}\mathrm{Cap}(G\setminus F_k)=0$ を満たすことと同値であり，(i) の証明によりそれはまた

$$\mathbb{P}_x\Big(\lim_{k\to\infty}\sigma_{G\setminus F_k}<\infty\Big)=0,\quad \text{q.e. } x\in E \tag{3.39}$$

が成り立つことと同値である．そこで, (3.38) を仮定し，その等式が成立するような $x\in E$ を固定する．この x に対して, 等式 (3.39) が成り立たないとすれば, ある相対コンパクトな開集合 G があって $\sigma=\lim_{k\to\infty}\sigma_{G\setminus F_k}$, $\mathbb{P}_x(\sigma<\infty)=\delta$ とおくとき，$\delta>0$ となる． Hunt 過程 M の準左連続性より $\mathbb{P}_x\big(X_\sigma\in\overline{G},\ \sigma<\infty\big)=\delta$. これは $\mathbb{P}_x\Big(\lim_{k\to\infty}\sigma_{E\setminus F_k}\leq\sigma<\zeta\Big)>\delta$ を意味し，仮定に矛盾することになる．

逆に (3.38) を (3.39) から導くためには, 相対コンパクトな開集合の増大列 $\{G_\ell\}$ で E に収束するものを選び，不等式 $\sigma_{E\setminus F_k}\geq\sigma_{G_\ell\setminus F_k}\wedge\sigma_{E\setminus G_\ell}$ を用いればよい． □

定理 3.11 u を準連続すると，u は細連続 q.e. である．さらに，適当な適切除外集合 N が存在して，u は $E\setminus N$ 上で概 Borel 可測となり，各 $x\in E\setminus N$ に対して，

$$\mathbb{P}_x\Big(t\mapsto u(X_t)\ \textit{is right continuous and}\ \lim_{s\uparrow t}u(X_s)=u(X_t),\ \ \forall\, t\in[0,\zeta)\Big)=1, \tag{3.40}$$

$$\mathbb{P}_x\Big(\lim_{t\uparrow\zeta}u(X_t)=u(X_{\zeta-}),\ X_{\zeta-}\in E\Big)=\mathbb{P}_x\big(X_{\zeta-}\in E\big) \tag{3.41}$$

が成り立つ．

Proof: u は準連続であるから，適当な開集合の単調減少列 $\{O_n\}$ が存在して，

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Cap}(O_n)=0,\quad \text{各 } n \text{ に対して，} u\big|_{E\setminus O_n} \text{ は連続}$$

となる．補題 3.13 より，(3.36) が (q.e. で) 成り立つことがわかる．N_0 を (3.36) における除外集合とする．また，定理 3.8 より $N_0\cup\big(\bigcap_{n=1}^\infty O_n\big)$ を含む適切除外集合 N が存在する． よって，(3.36) から $\mathbb{P}_x\Big(\lim_{n\to\infty}\sigma_{O_n}=\infty\Big)=1,\ x\in E\setminus N$ が成り立つことがわかる．従って，(3.40), (3.41) が成立することがわかる．ゆえに，u は $E\setminus N$ において細連続であることがわかる． □

以下，Hunt 過程 M に対応する Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は正則であると仮定する．

補題 3.14 (i) 関数 u を細連続 q.e. であって，$u\in\mathcal{F}$ となるならば，u は準連続となる．

(ii) $u\in\mathcal{F}$ を準連続とすると，u は (3.40) において，$[0,\zeta)$ を $[0,\infty)$ へ拡張した主張が成立する．

Proof: (i): $u\in\mathcal{F}$ を細連続 q.e. とする．すると，定理 2.7 により u には準連続修正 $\tilde{u}$ が存在する．すると，定理 3.11 より $\tilde{u}$ は細連続 q.e. である．一方， $u=\tilde{u}$, m-a.e. より，補題 3.9 より $u=\tilde{u}$ q.e. が成り立つ．よって，u は容量 0 の集合を除いて，準連続関数 $\tilde{u}$ と一致することから， u は準連続となることがわかる．

(ii): 定理 2.7 により，u は (u の) 狭い意味の準連続修正と q.e. で等しいことがわかることから成立することがわかる． □

定理 3.12 $u\in L^2(E;m)$ を非負値普遍可測函数とする．このとき，

(i) 任意の $t>0$ に対して，p_tu は T_tu の準連続修正である．

(ii) 任意の $\alpha>0$ に対して，$R_\alpha u$ は $G_\alpha u$ の準連続修正である．

この定理は，次の形の単調族定理 (Monotone Class Theorem: MCT) によって示すことができる：

補題 3.15 (MCT) $p\geq 1$ とする．H を次の条件を満たす E 上の非負値関数全体を表すものとする：

(i) $u_1,u_2\in H$ に対して，適当な実数 c_1,c_2 について $c_1u_1+c_2u_2\geq 0$ を満たすならば，$c_1u_1+c_2u_2\in H$;

(ii) $u_n\in H$ に対して，$u\in L^p(E;m)$ があって $u_n\nearrow u$ ならば，$u\in H$;

(iii) 任意の開集合 O に対して，適当な $u_n\in H$ が存在して， $u_n\nearrow 1_O$.

このとき， H は $L^p(E;m)$ における非負値の Borel 可測函数をすべて含む.

Proof: 任意に相対コンパクトな開集合 $G\subset E$ を固定して，$\mathcal{D}:=\{A\subset G:\ A\in\mathcal{B},\ 1_A\in H\}$ とおくと，$\mathcal{D}$ は G の開集合の部分集合をすべて含む Dynkin 族であることが簡単に示される．よって，Dynkin 族定理により $\mathcal{D}=\mathcal{B}(G)$.

次に，$\{G_n\}$ を相対コンパクトな開集合の増大列で，$G_n\subset G_{n+1}, \bigcup_{n=1}^\infty=E$ を満たすものをとる．そうして，$f\in L^p(E;m)\cap\mathcal{B}(E)_+$ に対して，$f_n=f\cdot 1_{G_n}$ とおくと，$\uparrow\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ である．よって，$f_n\in H$ であれば，(ii) より $f\in H$ がわかる．そこで，$f_n\in H$ を示そう．$f_n\in\mathcal{B}(G_n)_+$ であるから，適当な非負値の単関数列 $\{g_{n,k}\}$ が存在して，$f_n=\uparrow\lim\limits_{k\to\infty}g_{n,k}$ とできる．特に，各 $g_{n,k}$ は $g_{n,k}=\sum\limits_{i=1}^{\ell_{n,k}}\alpha_i^{n,k}1_{A_i^{n,k}}$, $A_i^{n,k}\in\mathcal{B}(G)$, $\alpha_i^{n,k}\geq 0$ と表示できることから，$g_{n,k}\in H$ が，従って，$f_n\in H$ がわかる． □

Proof of (定理 3.12): $u\in L^2(E;m)$ を非負値の普遍可測集合とすると，適当な $u_1,u_2\in L^2(E;m)\cap\mathcal{B}(E)$ で，$u_1\leq u\leq u_2$, $m\bigl(\{u_1<u_2\}\bigr)=0$ となるものが存在することから， $p_tu_1\leq p_tu\leq p_tu_2$ かつ $m\bigl(\{p_tu_1<p_tu_2\}\bigr)=0$ を満たす．よって，p_tu_1 および p_tu_2 が準連続関数ならば，補題 3.9 より，p_tu も準連続関数であることがわかる．よって，初めから u は Borel 可測であるとしてよい．

そこで，$\boldsymbol{F}=\bigl\{f\in L^2(E;m)\cap\mathcal{B}(E)_+:\ p_tf\ \text{は準連続関数}\ \bigr\}$ とおくと，$(C_0(E))_+\subset\boldsymbol{F}$ であることがわかる．実際，$u\in(C_0(E))_+$ ならば，

$$p_t(\alpha R_\alpha u)(x)=\alpha R_\alpha(p_tu)(x)=\longrightarrow p_tu(x),\quad x\in E,\ \alpha\to\infty$$

であるが，$p_tu\in\mathcal{F}$ より，この収束は $\mathcal{E}_1$ でもあることがわかる．また，命題 3.2 から $R_\alpha(p_tu)$ は α-超過関数であることに注意すると，定理 3.6 によって $R_\alpha u\in\boldsymbol{F}$ である．よって，定理 2.8 により $f\in\boldsymbol{F}$ がわかる．

また，$\{f_n\}$ を単調増加な $\boldsymbol{F}$ の関数列で，$f\in L^2(E;m)$ に収束するものとすれば，

$$p_tf_n\in\mathcal{F},\quad \mathcal{E}_1(p_tf_n,p_tf_n)\leq\frac{1}{t}\|f_n\|_{L^2}^2$$

に注意すると，p_tf_n が p_tf に $\mathcal{E}_1$ で収束することもわかるので，上の議論を繰り返せば，$f\in\boldsymbol{F}$ であることがわかる．よって，単調族定理 (補題 3.15) によって，$\boldsymbol{F}\supset L^2(E;m)\cap\mathcal{B}(E)_+$ がわかる．一般の普遍可測な $L^2(E;m)$ の元 f については $f=f^+-f^-$ と正の部分と負の部分に分けることにより，p_tf 準連続であることがわかる． □

3.5 直交射影と到達分布

ここでも，Hunt 過程 M に対応する Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は正則であると仮定する．概 Borel 集合 $B \subset E$ に対して，

$$\mathcal{F}_{E\setminus B} := \{u \in \mathcal{F} :\ \tilde{u}(x) = 0,\ \text{q.e. } x \in B\} \tag{3.42}$$

とおく．但し，$\tilde{u}$ は $u \in \mathcal{F}$ の準連続修正である．各 $\alpha > 0$ に対して，$\mathcal{F}_{E\setminus B}$ は Hilbert 空間 $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_\alpha)$ の閉部分空間である．そこで，$\mathcal{H}^\alpha_B$ を，その直交補空間とする：

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{E\setminus B} \oplus \mathcal{H}^\alpha_B; \quad \mathcal{H}^\alpha_B = \big(\mathcal{F}_{E\setminus B}\big)^\perp = \{v \in \mathcal{F} :\ \mathcal{E}_\alpha(u, v) = 0,\ \forall u \in \mathcal{F}_{E\setminus B}\} \tag{3.43}$$

このとき，$\mathcal{H}^\alpha_B$ への射影を $\mathcal{P}_{\mathcal{H}^\alpha_B}$ とおく．

一方，α-位の到達分布は $H^\alpha_B(x, A)$ は (3.18) で定義している：

$$H^\alpha_B(x, A) = \mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma_B} I_A(X_{\sigma_B})\big], \quad x \in E,\ A \in \mathcal{B}.$$

従って， v を非負値の普遍可測函数とすると，

$$H^\alpha_B v(x) = \mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma_B} v(X_{\alpha_B})\big]$$

で定義される．なお， v が q.e. で定義されている非負値の関数のときは，適当に E 上に非負値の普遍可測関数として拡張したものと考える．

定理 3.13 任意の $\alpha > 0$, $u \in \mathcal{F}$ に対して，$H^\alpha_B|\tilde{u}|$ は q.e. で有限な値を取り，$H^\alpha_B \tilde{u}$ は $\mathcal{P}_{\mathcal{H}^\alpha_B} u$ の準連続修正となる．

この定理を証明するために，ひとつ補題を用意する：

補題 3.16 $u \in \mathcal{F}$ を $\{p_t : t > 0\}$ に関して α-超過関数とする．一方，u_B を u の B 上の α-被約関数とする (see §2.5)．このとき，$H^\alpha_B u$ は u_B の準連続修正である．

Proof: 仮定から u は細連続，従って，準連続であることがわかる (定理 3.6, 補題 3.14)．さらに，$\{T_t : t > 0\}$ に関して α-超過関数である．よって，補題 2.18 および補題 2.19 より

$$H^\alpha_B u \le u_B, \quad m\text{-a.e.}, \tag{3.44}$$

$$H^\alpha_B u = u, \quad \text{q.e. on } B \tag{3.45}$$

を満たすことを言えばよい．実際，$H^\alpha_B u$ は $\{p_t : t > 0\}$ に関して α-超過関数であるから，$\{T_t : t > 0\}$ に関しても α-超過関数だからである．よって，$H^\alpha_B u \in \mathcal{F}$ が出てくる．すると，補題 3.14 より u は準連続であるから，(3.45) によって，$\widetilde{H^\alpha_B u} = H^\alpha_B u = u = \tilde{u}$, q.e. on B が成り立つ．これは，$H^\alpha_B u = u_B$ であることを示している．

さて，$x \in B^r$ のとき $\mathbb{P}_x(\sigma_B = 0) = 1$ だから，$H^\alpha_B u(x) = \mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma_B} u(X_{\sigma_B})\big] = u(x)$ が成り立つことから，(3.45) は，定理 3.5 および定理 3.9 より直ちにわかる．あとは (3.44) を示せば十分である．

そこで，$u_B (\in \mathcal{F})$ の非負値で Borel 可測な準連続修正 $\widetilde{u}_B$ を考える．次を示す：

$$e^{-\alpha t} p_t \widetilde{u}_B(x) \le \widetilde{u}_B(x), \quad \forall t > 0,\ \forall x \in E \setminus N; \tag{3.46}$$

$$\widetilde{u}_B(x) = u(x), \quad \forall x \in B \setminus N; \tag{3.47}$$

$$\mathbb{P}_x\big(\ t \mapsto \widetilde{u}_B(X_t) \text{ は } [0, \infty) \text{ 上で右連続 }\big) = 1, \quad \forall x \in E \setminus N. \tag{3.48}$$

u_B は $\{T_t : t > 0\}$ に関して α-超過関数であり，$p_t \widetilde{u}_B$ は定理 3.12 より準連続関数であるから，(3.46) は q.e. $x \in E$ が任意の $t > 0$ について成立する．また，(2.35) より，(3.47) が q.e. on B で成立することが分かる．さらに，定理 3.11 によって，(3.48) が $[0, \zeta)$ において成立するが，補題 3.14 により，これを $[0, \infty)$ まで拡張することが可能である． 定理 3.8 より，適当な除外集合 N が存在して，(3.46) が任意の有理数 $t > 0$ に対して成立するようにできる．

任意の $x \in E \setminus N$ に対して，(3.46) および (3.48) により，確率過程 $(e^{-\alpha t}\widetilde{u}_B(X_t), \mathscr{F}_t, \mathbb{P}_x)$ は右連続な非負値 supermartingale である．よって，任意抽出定理により，

$$H_B^\alpha \widetilde{u}_B(x) = \mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha t}\widetilde{u}_B(X_{\sigma_B})\big] \le \mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha 0}\,\widetilde{u}_B(X_0)\big] = \widetilde{u}_B(x).$$

一方，(3.47) および (3.48) より $H_B^\alpha \widetilde{u}_B(x) = H_B^\alpha u(x)$ が成り立つから，$H_B^\alpha \widetilde{u}_B \le \widetilde{u}_B$ が q.e. で成立する． よって (3.44) が示される． □

Proof (定理 3.13): まず，u を $\{p_t : t > 0\}$ に関して α-超過関数であるとする．(2.37) および (2.38) における議論によって，u の B 上の α-被約関数 u_B は $\mathcal{P}_{H_B^\alpha}u$ と一致することがわかる．よって，今示した補題により $H_B^\alpha u$ は $\mathcal{P}_{H_B^\alpha}u$ の準連続修正であることがわかる．

次に，一般の $u \in \mathcal{F}$ に対しては， $(-n) \vee (u \wedge n)$ で近似することにより，さらに，$u = u^+ - u^-$, $u^\pm \in \mathcal{F}$ と正の部分と負の部分に分けることにより，初めから u は有界な非負値関数と仮定してよい．各 $\beta > 0$ に対して，$R_\beta \tilde{u}$ は有界な α-超過関数となる．ここで，$H_B^\alpha R_\beta \tilde{u}$ は $\mathcal{P}_{H_B^\alpha}(G_\beta u)$ の準連続修正であることに注意する．

一方，$\beta G_\beta u$ は，補題 2.4 より，$\beta \to \infty$ のとき u に $\mathcal{E}_1$-収束することから，$\mathcal{P}_{H_B^\alpha}(\beta G_\beta u)$ も $\mathcal{P}_{H_B^\alpha}u$ に $\beta \to \infty$ のとき $\mathcal{E}_1$-収束することが分かる．また，適当に適切除外集合 N を取ることにより，$\tilde{u}$ に対して (3.40) が $x \in E \setminus N$ に対して成立するから， $\lim_{\beta\to\infty} H_B^\alpha(\beta R_\beta \tilde{u})(x) = H_B^\alpha \tilde{u}(x)$, $x \in E \setminus N$ が成り立つ．よって，定理 2.8 により $H_B^\alpha \tilde{u}$ は $\mathcal{P}_{H_B^\alpha}u$ の準連続修正であることがわかる． □

次に，$B \subset E$ を概 Borel 集合とし, $G = E \setminus B$ とおく．このとき，$\mathcal{F}_G$ は (2.37) の右辺で定義される $\mathcal{F}$ の部分空間である ($\mathcal{F}_G = \{u \in \mathcal{F} :\ \tilde{u} = 0 \text{ q.e. on } B\}$). G 上の m に関して自乗可積分な実可測函数全体 $L^2(G;m)$ は $L^2(E;m)$ の部分空間 $\big\{f \in L^2(E;m) :\ u = 0\ m\text{-a.e. on } B\big\}$ と同一視できる．この同一視の下，$\mathcal{F}_G$ は $L^2(G;m)$ の線形部分空間であるが, 一般にはその稠密な部分空間であるとは限らない．しかしこの条件を除いては

$$\mathcal{E}_G(f,g) := \mathcal{E}(f,g),\ f,g \in \mathcal{F}_G, \tag{3.49}$$

によって定義される $L^2(G;m)$ 上の双線形形式 $\mathcal{E}_G$ は $L^2(G;m)$ 上の Dirichlet 形式としての条件を全て満たしていることがわかる．$\mathcal{E}_G$ を Dirichlet 形式 $\mathcal{E}$ **の** G **上の部分形式** (the part form on G) と呼ぶ．

次に G を (E の) 開集合とするとき，Hunt 過程 M に対して，$\{X_t^0\}$ を次のように定義する: $\omega \in \Omega$, $t \in [0,\infty)$ に対して，

$$X_t^0(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega), & 0 \le t < \sigma_B(\omega), \\ \Delta, & t \ge \sigma_B(\omega). \end{cases} \tag{3.50}$$

但し，$X_\infty^0(\omega) = \Delta$ と約束する．また，$\zeta^0(\omega) := \zeta(\omega) \wedge \sigma_B(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $G_\Delta = G \cup \Delta$ とおくと，$\mathsf{M}_G := (\Omega, \mathcal{M}, \{X_t^0\}, \zeta^0, \{\mathbb{P}_x\}_{x \in G_\Delta})$ は $(G, \mathcal{B}(G))$ 上の Markov 過程となる．これを M の G における**部分過程** (the part of the process M on the set G) と呼ぶ．このとき，M_G の推移関数と Markov Resolvent 核は，それぞれ

$$p_t^0 f(x) := \mathbb{E}_x\big[f(X_t); t < \sigma_B\big], \qquad R_\alpha^0 f(x) := \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\sigma_B} f(X_t)dt\Big], \quad x \in G \tag{3.51}$$

という表示をもつ．特に $\{p_t^0; t \ge 0\}$ は $(G, \mathcal{B}(G))$ 上の劣 Markov 核であり，定義 §3.2 における Markov 推移関数の性質 (t.1), (t.2), (t.3) を ($(E,\mathcal{B})$ を $(G,\mathcal{B}(G))$ に置き換えて) 満たすことがわかる． また，(3.51) の右辺によって，$p_t^0 f$ 及び $R_\alpha^0 f$ は E 上の関数に自然に拡張される．ところで，$B = E \setminus G$ が閉集合であることと $\mathring{B} \subset B^r \subset B^a = B$ に注意すると，定理 3.5 より $B \setminus B^r$ が半極集合であり，従って，定理 3.9 より，それは除外集合となることから，$\mathbb{P}_x(\sigma_B = 0) = 1$, q.e. on B が成り立つ．よって，$p_t^0 f$ 及び $R_\alpha^0 f$ は B 上 q.e. で 0 に等しいことが分かる．

一方，(3.26) より, $f \in L^2(E;m) \cap \mathcal{B}_b$ に対して

$$R_\alpha f(x) = R_\alpha^0 f(x) + H_B^\alpha R_\alpha f(x),\ x \in E, \tag{3.52}$$

が成り立つ (そこでは B がコンパクトのときに成り立つとしているが，概 Borel 集合に対しても成立する) が, 定理 3.13 を考慮すれば, この等式は $R_\alpha f$ の $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_\alpha)$ 内での $\mathcal{F}_G$ とその直交補空間 $\mathcal{H}_B^\alpha$ への直和分解式に他ならないことが分かる．従って

$$R_\alpha^0 f \in \mathcal{F}_G, \quad \mathcal{E}_\alpha(R_\alpha^0 f, v) = (f, v), \quad \forall\, f \in L^2(E;m) \cap \mathcal{B}_b,\ v \in \mathcal{F}_G, \tag{3.53}$$

(3.53) で特に $v = R^0_\alpha g$ とおくと, R^0_α の m に関する対称性

$$(R^0_\alpha f, g) = (f, R^0_\alpha g), \quad f, g \in (\mathcal{B}(G))_b \cap L^2(G:m), \tag{3.54}$$

が得られる. 故に p^0_t も G 上で m に関して対称である. その結果推移関数 $\{p^0_t; t \geq 0\}$ は $L^2(G;m)$ 上のマルコフ的で対称な線形作用素の強連続縮小的半群 $\{T^0_t; t > 0\}$ を一意に定めることが示される. 実際, G が開集合であるから, $f \in C_b(G)$, $x \in G$ に対して,

$$\lim_{t \to 0} p^0_t f(x) = \lim_{t \to 0} \mathbb{E}_x\big[f(X_t); t < \sigma_B\big] = \mathbb{E}_x\big[f(X_0); 0 < \sigma_B\big] = f(x)\mathbb{P}(\sigma_B > 0) = f(x)$$

が成り立つことから, 命題 3.3 より結論を得られる. しかも $\{T^0_t; t > 0\}$ から決まる $L^2(G;m)$ 上の Dirichlet 形式が, $\mathcal{E}_G$ に他ならないことを方程式 (3.53) は示している. 以上より

定理 3.14 G を E の開集合し, M_G を M の G 上の部分過程, $\mathcal{E}_G$ を $\mathcal{E}$ の G 上の部分形式とする. M_G は G 上で m に関して対称であり, $\mathcal{E}_G$ は $L^2(G;m)$ 上の正則な Dirichlet 形式である. そして M_G の $L^2(G;m)$ 上の Dirichlet 形式は $\mathcal{E}_G$ と一致し, 等式 (3.53) が成立する.

Chapter 4

Feller 半群

(E,ρ) を局所コンパクトで可分な距離空間, $\mathcal{B}$ を E 上の Borel 集合族とする．また，m そ至る所正である Radon 測度とする．

4.1 Feller 半群と Markov 過程

$\mathsf{M} = (\Omega, \mathcal{M}, \{\mathcal{M}_t\}, X_t, \theta_t, \mathbb{P}_x)$ は $(E,\mathcal{B})$ を状態空間とする Markov 過程とする．また，すべての x について $t \mapsto X_t$ は $\mathbb{P}_x$-a.s で $[0,\infty)$ の各点で右連続とする．このとき，M は発展的可測である．すなわち，任意の $t \geq 0$ に対して，(2 変数) 写像 $\Phi_t : (s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ は $\mathcal{B}[0,t] \times \mathcal{M}_t/\mathcal{B}$-可測である．

命題 4.1 $\{X_t\}$ を発展的可測，σ を $\{\mathcal{M}_t\}$-停止時間に対して

$$X_\sigma(\omega) := X_{\sigma(\omega)}(\omega), \quad \omega \in \Omega$$

とおくとき，X_σ は $\mathcal{M}_\sigma/\mathcal{B}$-可測である．

Proof: $\{\mathcal{M}_t\}$-停止時間 σ に対して，

$$\mathcal{M}_\sigma = \Big\{A \in \mathcal{M} :\ \forall t \in [0,\infty),\ A \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{M}_t\Big\}$$

であった，また，$\{X_t\}$ は発展的可測であるから，任意の $t \in [0,\infty)$, $A \in \mathcal{B}$ に対して，

$$\{(s,\omega) :\ X_s(\omega) \in A,\ 0 \leq s \leq t\} \in \mathcal{B}[0,t] \times \mathcal{M}_t$$

である．ところで，$A \in \mathcal{B}$ に対して $\{X_\sigma \in B\} \in \mathcal{M}_\sigma$ であること, あるいは同値な条件である

$$\{X_\sigma \in B\} \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{M}_t, \quad \forall t \in [0,\infty) \tag{4.1}$$

を示せば命題の証明は終わる．そこで，各 t に対して $\Psi_t : \{\sigma \leq t\} \to [0,t] \times \Omega$ を $\Psi_t(\omega) = (\sigma(\omega),\omega)$, $\omega \in \{\sigma \leq t\}$ で定義すると，今，写像 $\omega \mapsto X_\sigma(\omega)$ の $\{\sigma \leq t\}$ への制限は $\Phi_t \circ \Psi_t$ であることに注意する．$\{X_t\}$ は発展的可測であるから，Φ_t は $\mathcal{B}[0,t] \times \mathcal{M}_t/\mathcal{B}$-可測である．一方，各 $0 \leq s_1 < s_2 \leq t$ および $\Lambda \in \mathcal{M}_t$ に対して，

$$\Psi_t^{-1}\big((s_1,s_2] \times \Lambda\big) = \big\{\omega \in \Omega :\ \Psi_t(\omega) \in (s_1,s_2] \times \Lambda\big\} = \{\omega \in \Omega :\ s_1 < \sigma(\omega) \leq s_2\} \cap \Lambda \in \mathcal{M}_t$$

が成り立つから，Ψ_t は $\mathcal{M}_t/\mathcal{B}[0,t] \times \mathcal{M}_t$-可測である．ゆえに，$\Phi_t \circ \Psi_t$ は $\mathcal{M}_t/\mathcal{B}$-可測である．従って，(4.1) が示された．

□

この節の主結果を述べよう．

定理 4.1 M を $(E,\mathcal{B}^*)$ を状態空間とする右連続な Markov 過程とする．また，適当な E 上の有界連続な関数からなる線形空間 $\mathcal{L}$ があって，次の条件を満たすものとする：

(i) 各 $f\in\mathcal{L},\ \alpha>0,\ x\in E_\Delta$ に対して，写像 $t\mapsto R_\alpha f(X_t)$ は $[0,\zeta)$ の各点において $\mathbb{P}_x$-$a.s.$ に対して右連続.

(ii) 任意の開集合 $G\subset E$ に対して，適当な $f_n\uparrow 1_G$ を満たす単調増加な関数列 $\{f_n\}\subset\mathcal{L}$ が存在する.

このとき，$\mathsf{M}=(\Omega,\mathcal{M},\{\mathcal{M}_{t+}\},X_t,\theta_t,\mathbb{P}_x)$ は強 Markov 性を持つ.

Proof: 任意に $\mu\in\mathcal{P}(E_\Delta),\ A\in\mathcal{B}_\Delta$ および σ を $\{\mathcal{M}_{t+}\}$-停止時間をとる．このとき，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$\sigma_n(\omega)=\begin{cases}\dfrac{k}{2^n} & \text{on }\Big\{\dfrac{k-1}{2^n}\le\sigma<\dfrac{k}{2^n}\Big\}\\ \infty & \text{on }\{\sigma=\infty\}.\end{cases}$$

と定義すると，$\sigma_n\downarrow\sigma\ (n\to\infty)$，かつ $\sigma(\omega)<\infty$ ならば $\sigma_n(\omega)>\sigma(\omega)$ が成り立つ．また， 各 σ_n も $\{\mathcal{M}_{t+}\}$-停止時間となる．実際，各 $t<\infty$ に対して，$([2^nt]-1)/2^n\le t-1/2^n$ に注意すると

$$\{\sigma_n<t\}=\bigcup_{k=1}^{[2^nt]-1}\Big\{\sigma_n=\frac{k}{2^n}\Big\}=\bigcup_{k=1}^{[2^nt]-1}\Big\{\frac{k-1}{2^n}\le\sigma<\frac{k}{2^n}\Big\}\in\mathcal{M}_{k2^{-n}}\subset\mathcal{M}_t$$

となるからである． このとき，各 $f\in\mathcal{L},\ \alpha>0,\ x\in E_\Delta$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(X_{\sigma+t})dt\Big]&=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(X_{\sigma_n+t})dt\Big]\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^\infty\mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(X_{k2^{-n}+t})dt;\sigma_n=k2^{-n}\Big]\end{aligned}\tag{4.2}$$

が成り立つ．$\{\sigma_n=k2^{-n}\}=\{(k-1)/2^n\le\sigma<k/2^n\}\in\mathcal{M}_{k2^{-n}}$ であるから，$\{X_t\}$ の ($\{\mathcal{M}_t\}$ に関する) Markov 性を用いると，(4.2) の最右辺は,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^\infty\mathbb{E}_x\Big[\mathbb{E}_{X_{k2^{-n}}}\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(X_t)dt\Big];\sigma_n=k2^{-n}\Big]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_x\big[R_\alpha f(X_{\sigma_n})\big]$$

となる．一方， $\mathbb{P}_x$-a.s. で，$t\mapsto R_\alpha f(X_t)$ は $[0,\zeta)$ の各点において右連続，$[\zeta,\infty]$ の各点において 0 となることから，結局 $[0,\infty]$ で右連続となる．従って， $\sigma_n\downarrow\sigma\ (n\to\infty)$ より，上の右辺の極限は $\mathbb{E}_x\big[R_\alpha f(X_\sigma)\big]$ だから，Fubini の定理を用いると

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\mathbb{E}_x\Big[f(X_{\sigma+t})\Big]dt=\mathbb{E}_x\big[R_\alpha f(X_\sigma)\big]=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\mathbb{E}_x\Big[\mathbb{E}_{X_\sigma}\big[f(X_t)\big]\Big]dt$$

がすべての $\alpha>0,\ x\in E_\Delta,\ f\in\mathcal{L}$ で成立することがわかる．また，$t\mapsto\mathbb{E}_x[f(X_{t+\sigma})]$ および $t\mapsto\mathbb{E}_x\big[\mathbb{E}_{X_\sigma}[f(X_t)]\big]$ はともに右連続であり，それぞれの Laplace 変換が一意することから，Laplace 逆変換の一意性により，

$$\mathbb{E}_x[f(X_{t+\sigma})]=\mathbb{E}_x\big[\mathbb{E}_{X_\sigma}[f(X_t)]\big]$$

が成り立つことがわかる．次に，仮定 (ii) により，任意の開集合 $G\subset E$ に対して,

$$\mathbb{P}_x\big(X_{t+\sigma}\in G\big)=\mathbb{E}_x\big[\mathbb{P}_{X_\sigma}(X_t\in G)\big]$$

が成り立つことがわかるから，MCT 定理を用いることにより $G\in\mathcal{B}$ に対して成立することがわかる.

最後に，任意の $\Lambda\in\mathcal{M}_{\sigma+}$ に対して，$\sigma_\Lambda=\sigma$ on $\Lambda,\ \sigma_\Lambda=\infty$ on Λ^c として σ_Λ を定義すると，σ_Λ は $\{\mathcal{M}_{t+}\}$-停止時間である．実際，$\{\sigma_\Lambda\le t\}=\{\sigma\le t\}\cap\Lambda\in\mathcal{M}_{t+}$ だからである．ここで，f を有界な $\mathcal{B}_\Delta$-可測函数とすると,

$$\mathbb{E}_x\big[f(X_{t+\sigma_\Lambda})\big]=\mathbb{E}_x\big[f(X_{t+\sigma});\Lambda\big]+f(\Delta)\mathbb{P}_x(\Lambda^c)$$

であり，また

$$\mathbb{E}_x\big[\mathbb{E}_{X_{\sigma_\Lambda}}[f(X_t)]\big]=\mathbb{E}_x\big[\mathbb{E}_{X_\sigma}[f(X_t)];\Lambda\big]+f(\Delta)\mathbb{P}_x(\Lambda^c)$$

が成り立つ．そこで，集合

$$\Big\{ f \in (\mathcal{B}_\Delta)_b : \ \mathbb{E}_x[f(X_{t+\sigma})] = \mathbb{E}_x\big[\mathbb{E}_{X_\sigma}[f(X_t)]\big] \ \Big\} \tag{4.3}$$

を考えると，これは線形空間であり 1_{E_Δ} を含む．また，$f(\Delta)=0$ を満たす有界で $\mathcal{B}_\Delta$-可測な関数は $\mathcal{B}$-可測な関数とみなせることから，上で示したことにより，そのような関数は ($\Lambda=\Omega$ とおくことで $\sigma_\Lambda=\sigma$ となるから) (4.3) の集合に属することがわかる． また，任意の $(\mathcal{B}_\Delta)_b$ に属する関数は，1_{E_Δ} と $\mathcal{B}_b$ に属する関数の線形結合で表示できることから，結局 (4.3) の集合は $(\mathcal{B}_\Delta)_b$ と一致する．よって，定理が示された． □

注意 4.1 $\{\mathscr{F}_t^0\}$ は最小の適合的フィルトレーションであるから (see Section 3.1)，$\mathscr{F}_{t+} \subset \mathcal{M}_{t+}$ が成り立つ． したがって，$\{\mathcal{M}_{t+}\}$ に関して Markov 性をもてば $\{\mathscr{F}_{t+}\}$ に関しても Markov 性を持つ．よって，補題 3.2 から $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}$ が任意の t について成り立つことがわかる．

4.2 Feller 過程の構成

§3.3 において，M を Hunt 過程とするとき，その推移半群 $\{P_t\}$ が m-対称であるならば，$L^2(E;m)$ 上の Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が構成出来ることを述べた．一般には，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は正則であるとは限らない．しかし，正則な Dirichlet 形式が与えられると，それに対応する m-対称な Hunt 過程を構成することが出来る．

定理 4.2 (Fukushima's existence theorem) $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(E;m)$ 上の正則な Dirichlet 形式とすると，E 上の m-対称な Hunt 過程 M が存在して，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は M の Dirichlet 形式となる．

この定理は，以下に述べる $C_\infty(E)$ 上の Feller 推移関数に対応する Hunt 過程 (Feller 過程と呼ばれている) の存在定理とならんで，Markov 過程論研究において重要な役割を果たす．本講義ではその証明は省略するが，証明のカギとなるのは第 3 章において紹介した確率論的ポテンシャル論を用いて，Feller 推移関数の場合での C_∞-関数を狭い意味の準連続関数に置き換えることと，除外集合を許す (容量零の集合を除く) ことにある．

定理 4.3 (Feller 過程の存在)

$\{P_t(x,A), t\ge 0, x\in E, A\in\mathcal{B}(E)\}$ を $(E,\mathcal{B})$ 上の sub-Markov 推移関数とし，各 $x\in E$ に対して，$P_0(x,\cdot)=\delta_x(\cdot)$ を満たすものとする．但し，δ_x は x における delta 測度とする．また，$C_\infty(E)$ を無限遠点 で 0 となる E 上の連続関数全体を表し，次の条件を満たすものとする：

(1) 各 $t\ge 0$ に対して，$P_tC_\infty(E)\subset C_\infty(E)$ を満たす；

(2) 各 $f\in C_\infty(E)$ に対して，$\displaystyle\lim_{t\downarrow 0}\sup_{x\in E}\big|P_tf(x)-f(x)\big|=0$ が成り立つ；

このとき，推移関数が $P_t(x,A)$ であるような適当な $(E,\mathcal{B})$ を状態空間とする Hunt 過程が存在する；

$$\mathbb{P}_x(X_t\in A)=P_t(x,A), \quad x\in E,\ t\ge 0,\ A\in\mathcal{B}. \tag{4.4}$$

Proof: E_Δ を E の 1 点コンパクト化とする．但し，E が既にコンパクトの場合は，Δ を孤立点として E に付け加える．このとき，$P_t(x,A)$ を，次のように $(E_\Delta,\mathcal{B}_\Delta)$ 上の Markov 推移関数に拡張したものを $N_t(x,A)$ とする: $x\in E_\Delta,\ t\ge 0,\ A\in\mathcal{B}_\Delta$,

$$N_t(x,A):=\begin{cases} P_t(x,A\cap E)+\mathbf{1}_A(\Delta)\big(1-P_t(x,E)\big), & x\in E,\\ \mathbf{1}_A(\Delta), & x=\Delta.\end{cases} \tag{4.5}$$

C $:=C(E_\Delta):=$"E_Δ 上の連続関数全体" とおく．$f\in$ C に対して，g を，$f-f(\Delta)$ の E への制限とすると，

$$N_tf(x)=P_tg(x)+f(\Delta),\ x\in E, \quad N_tf(\Delta)=f(\Delta)$$

を満たす．よって，各 $f \in \mathsf{C}$ に対して，$g \in C_\infty(E)$ であることから，$N_t f \in \mathsf{C}$ であって，かつ $N_t f$ は，$t \downarrow 0$ のとき E_Δ 上で f に一様収束することが分かる．さらに，$f \in \mathsf{C}$ に対して，

$$N_{t+s}f - N_t f = N_t(N_s f - f) \to 0 \quad \text{as } s \downarrow 0$$

となることから，$t \mapsto N_t f$ は右連続となることが分かる．従って，任意の $\alpha > 0$ に対して，$R_\alpha f(x) := \int_0^\infty e^{-\alpha t} N_t f(x) dt$ とおくと，$R_\alpha f \in \mathsf{C}$ が成り立つ．また，$\alpha R_\alpha f(x) = \int_0^\infty e^{-t} N_{t/\alpha} f(x) dt$ に注意すると $\alpha R_\alpha f$ は E_Δ 上で一様に f に収束することが分かる．

ところで，$C_\infty(E)$ は，$\mathsf{C} = C(E_\Delta)$ の関数 f で $f(\Delta) = 0$ を満たす全体からなる C の部分空間と同一視できる．この同一視の下，各 $\alpha > 0$ に対して，$R_\alpha C_\infty(E) \subset C_\infty(E)$ となる．特に，任意の $\alpha > 0$ と E 上で至るところ正である $C_\infty(E)$ の元 f に対して，$R_\alpha f$ も E 上で至るところ正となることが分かる．実際，任意の $x_0 \in E$ に対して $f(x_0) = \lambda > 0$ とおく．(2) より，$\varepsilon = \lambda/2 > 0$ に対して，適当な $t_0 > 0$ が存在して，

$$|P_t f(x_0) - f(x_0)| \le \sup_{x \in E} \left| P_t f(x) - f(x) \right| < \varepsilon = \frac{\lambda}{2}, \quad 0 \le t \le t_0$$

を満たす．よって，$0 \le t \le t_0$ を満たす任意の t について $P_t f(x_0) \ge f(x_0) - \varepsilon = \lambda/2$ が成立する．ゆえに，

$$R_\alpha f(x_0) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} N_t f(x_0) dt \ge \int_0^{t_0} e^{-\alpha t} P_t f(x_0) dt \ge \frac{e^{-\alpha t_0} \lambda t_0}{2} > 0$$

となる．

次に $T := [0, \infty)$ とし，$W := E_\Delta^T$ 及び $\mathcal{G} := \mathcal{B}_\Delta^T$ を $(E_\Delta, \mathcal{B}_\Delta)$ の無限直積可測空間とする．すると，Kolmogorov の拡張定理により，各 $x \in E_\Delta$ に対して，$(W, \mathcal{G})$ 上に確率測度 $\mathbb{P}_x$ で，$(W, \mathcal{G}, \mathbb{P}_x)$ 上の座標関数 $X_t(w) = w(t)$ が $(E, \mathcal{B})$ を状態空間に持つ Markov 過程であって，$\{N_t(x, A)\}$ を推移関数としてもつものが存在する．

各 $t \in [0, \infty)$ に対して $\mathcal{G}_t := \sigma(X_s; s \le t)$ とおき，$\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$ と定める．W の元で，次の条件を満たす w の全体を Λ で表す：

(a-i) 各 $t > 0$ に対して，$\displaystyle\lim_{s \uparrow t,\, s \in \mathbb{Q}_+} w(s)$ が E_Δ に存在する；

(a-ii) 各 $t \ge 0$ に対して，$\displaystyle\lim_{s \downarrow t,\, s \in \mathbb{Q}_+} w(s)$ が E_Δ に存在する;

(b) $w(t) \in E$ を満たす任意の $t \in \mathbb{Q}_+$ に対して，$w(\mathbb{Q} \cap [0, t])$ は E の有界集合となる．

但し，E がすでにコンパクトであるときは，(b) を満たす w 全体は W と一致する，このとき，条件 (a), (b) を満たす元 $w \in W$ の全体をそれぞれ Λ_a と Λ_b とおけば，$\Lambda = \Lambda_a \cap \Lambda_b$ となる．次に，$\Lambda \in \mathcal{G}$ 及び $\mathbb{P}_x(\Lambda) = 1,\ x \in E_\Delta$ を示す．

Step 1. $f \in \mathsf{C}_+$ に対して，$g = R_\alpha f,\ \alpha > 0$ とおく．このとき，任意の $t > 0$ に対して

$$e^{-\alpha t} N_t g(x) = \int_t^\infty e^{-\alpha u} N_u f(x) du \le g(x)$$

である．従って，$0 \le t < s, \Gamma \in \mathcal{G}_t$ 及び $x \in E_\Delta$ に対して，Markov 性を用いると，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha s} g(X_s); \Gamma\right] &= \mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha s} g(X_{s-t}) \circ \theta_t; \Gamma\right] \ = \mathbb{E}_x\Big[e^{-\alpha s} \mathbb{E}_{X_t}[g(X_{s-t})]; \Gamma\Big] \\
&= \mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha s} N_{s-t} g(X_t); \Gamma\right] \ = \mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha t} \cdot e^{-\alpha(s-t)} N_{s-t} g(X_t); \Gamma\right] \\
&\le \mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha t} g(X_t); \Gamma\right]
\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．従って，各 $x \in E_\Delta$ に対して，$\{e^{-\alpha t} g(X_t), \mathcal{G}_t, t \ge 0\}$ は $\mathbb{P}_x$ に関する非負値 supermartingale となる．

次に，E 上至るところで正であるような $f \in C_\infty(E)$ をとり，$g := R_\alpha f,\ \alpha > 0$ とおくと，上に述べたことにより，$g \in C_\infty(E)$ であり，かつ E 上至るところ正となることが分かる．ところで，E がコンパクトでないとき，

$$\Lambda_b^c := \bigcup_{t \in \mathbb{Q}_+} \Gamma_t := \bigcup_{t \in \mathbb{Q}_+} \Big\{ w \in W :\ e^{-\alpha t} g(X_t(w)) > 0,\ \inf_{s \in \mathbb{Q} \cap [0,t]} e^{-\alpha s} g(X_s(w)) = 0 \Big\}$$

が成り立つ．実際，g は E 上至るところ正であるから，“$g(x)=0 \Leftrightarrow x=\Delta$” である．よって，$t>0$ に対して，$w(t)\in E$ と $g(X_t(w))=g(w(t))>0$ は同値であるからである．

次に，$T(w)=\inf\{t\in\mathbb{Q}_+ :\ g(X_t(w))=0\},\ w\in W$ とおくと，任意の $t>0$ に対して，

$$\{T\le t\}=\bigcup_{s\in\mathbb{Q}\cap[0,t]}\left\{e^{-\alpha s}g(X_s)=0\right\}\in\mathcal{G}_t$$

より T は $\{\mathcal{G}_t\}$-停止時間となる．また，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，停止時刻 $S_n=\inf\{t\in\mathbb{Q}_+ : e^{-\alpha t}g(X_t)<1/n\}$ を考えると，任意の n に対して $S_n\le T$ である．よって，任意の有理数 $q\ge 0$ に対して，停止時間 S_n および $T+q$ に対して任意抽出定理を適用すると，

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha T}g(X_{T+q}),T<\infty\right]=\mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha T}g(X_{T+q})\right]\le\mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha S_n}g(X_{S_n})\right]\le\frac{1}{n}$$

が任意の n について成立することから，$\mathbb{P}_x\big(g(X_{T+q})=0,T<\infty\big)=1$ が成り立つ．よって，

$$\mathbb{P}_x\big(g(X_t)=0,\ t\in\mathbb{Q}\cap[T,\infty)\big)=1$$

が成り立つ．また，$\{g(X_t)=0,\ t\in\mathbb{Q}\cap[T,\infty)\}=\Lambda_b$ である． よって，$\mathbb{P}_x(\Lambda_b)=1,\ x\in E_\Delta$.

Step 2. E_Δ 上の距離を同じく d とし，各 $\varepsilon>0$ に対して，

$$h_\varepsilon(x,y)=\begin{cases}1 & \text{if } d(x,y)\ge\varepsilon,\\ 0 & \text{if } d(x,y)<\varepsilon\end{cases}$$

と定義する．U を $[0,\infty)$ の有限集合で，$u_1<u_2<\cdots<u_{2n}$ と (偶数個の組と) する．このとき，

$$H_\varepsilon(U):=H_\varepsilon(U)(w):=\sum_{k=1}^{n}h\big(X_{u_{2k-1}}(w),X_{u_{2k}}(w)\big)$$

とおくと，作り方から $H_\varepsilon(U)$ は $\mathcal{G}$-可測である． 任意の $D\subset[0,\infty)$ に対して，

$$H_\varepsilon(D)=\sup_{\substack{U\subset D,\,U:\text{finite},\\ \text{even numbers}}}H_\varepsilon(U)$$

と定める．D が可算集合ならば，$H_\varepsilon(D)$ も $\mathcal{G}$-可測であることがわかる． 従って，

$$\Lambda_a=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\Big\{H_{1/n}\big(\mathbb{Q}\cap[0,m]\big)<\infty\Big\}$$

であることに注意すると，$\Lambda_a\in\mathcal{G}$ がわかる．一方，Step 1. より，各 $f\in\mathsf{C}_+$ に対して，$g=R_\alpha f,\alpha>0$ とおくと，$\{e^{-\alpha t}g(X_t)\}$ は supermartingale であるから，任意の $x\in E_\Delta$ に対して，$t\mapsto e^{-\alpha t}g(X_t)$ は $\mathbb{P}_x$-a.s. で，$[0,\infty)\cap\mathbb{Q}$ 上において右極限，$(0,\infty)\cap\mathbb{Q}$ で左極限を持つ． よって，このことは $f\in\mathsf{C}$ に対しても成立する．

$\Lambda(\alpha,f)$ を，$t\mapsto g(X_t(w))$ を $\mathbb{Q}_+$ 上の関数と見たとき，$[0,\infty)$ の各点で右極限，$(0,\infty)$ で左極限をもつような，$w\in W$ の全体集合とする．今述べたことから $\mathbb{P}_x(\Lambda(\alpha,f))=1,\ x\in E_\Delta,\ f\in\mathsf{C}$ である．次に，$\{\alpha_n\}$ を $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\infty$ となる数列とする．また，$\{f_k\}\,(\subset\mathsf{C})$ を C において稠密な可算部分集合とする．すると，$\big\{\alpha_n R_{\alpha_n}f_k :\ n\ge 1,\ k\ge 1\big\}$ は C において一様ノルムに関して稠密であることがわかる．実際，任意の $f\in\mathsf{C}$ に対して, $\alpha\to\infty$ のとき $\alpha R_\alpha f$ は一様に f に収束するからである．

さて，Λ' を，次の条件を満たす $w\in W$ の全体集合とする :『任意の $f\in\mathsf{C}$ に対して，$t\mapsto f(X_t(w))$ を $\mathbb{Q}_+$ から $\mathbb{R}$ への関数とみて，$[0,\infty)$ の各点で右極限，$(0,\infty)$ で左極限を持つ』. すると，明らかに $\Lambda'=\bigcap_{n\ge1}\bigcap_{k\ge1}\Lambda(\alpha_n,f_n)$ となるから，すべての $x\in E_\Delta$ に対して $\mathbb{P}_x(\Lambda')=1$ となる．作り方から $\Lambda'=\Lambda_a$ より，$\mathbb{P}_x(\Lambda)=1$ となることがわかった.

Step 3. W から Λ^c を取り除いた集合を W' とおく：$W' := W \cap \Lambda$. そうして，$\mathcal{G}'_t := \{A \cap \Lambda :\ A \in \mathcal{G}_t\}$, $\mathcal{G}' := \{A \cap \Lambda :\ A \in \mathcal{G}\}$ とおき，さらに $\mathbb{P}'_x := \mathbb{P}_x\big|_{\mathcal{G}'}$ と定義する．また，X_t を W' に制限したものを X'_t と書く：$X'_t = X_t\big|_{W'}$.

このとき，各 $x \in E_\Delta$ に対して，$(W', \mathcal{G}', \{\mathcal{G}'_t\}, \mathbb{P}_x)$ に関して，$\{X'_t\}$ は Markov 過程となることがわかる． そこで，以下 $'$ をすべて省略して書くことにする．すなわち，$W := \Lambda$ として考えることにする．

次に，各 $t \geq 0$ と $w \in W$ に対して，

$$Z_t(w) := \lim_{s\downarrow t,\, s\in\mathbb{Q}} X_s(w) \tag{4.6}$$

とおく．$W = \Lambda$ であったから，(4.6) の (右) 極限は必ず存在する．

各 $w \in W$ に対して，$t \mapsto Z_t(w)$ は至る所右連続で，かつ左極限が存在する．さらに，$Z_t(w) = \Delta$ のとき，$s \geq t$ ならば $Z_s(w) = \Delta$ となる．また，Z_t は $(\mathcal{G}_{t+})/\mathcal{B}_\Delta$-可測である．実際， $t \geq 0$ に対して

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{B}_\Delta :\ \{Z_t \in A\} \in \mathcal{G}_{t+}\}$$

とおくと，$\mathcal{A}$ は E_Δ 上の σ-加法族である．また，$t \mapsto Z_t$ の右連続性により $\mathcal{A}$ は E_Δ の開集合族を含むことが分かる．よって，$\mathcal{A} = \mathcal{B}_\Delta$ が結論づけられ，Z_t が $(\mathcal{G}_{t+})/\mathcal{B}_\Delta$-可測であることがわかる．

次に，$(W, \mathcal{G}, \{\mathcal{G}_{t+}\}, \{Z_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}_x)$ は (4.5) を推移関数にもつ $(E, \mathcal{B})$ を状態空間とするマルコフ過程となることを示す．さらに $\mathbb{P}_x(X_t = Z_t) = 1$ が任意の $t \geq 0$ について成立することも示す．

そこで，$x \in E_\Delta$, $t \geq 0$, $\Gamma \in \mathcal{G}_{t+}$ を任意にとり，また $f \in \mathsf{C}$ および $s > t$ を $s - t \in \mathbb{Q}$ となるように任意にとる．$\{t_n\}$ を t に収束する狭義単調減少の有理数列とし，$s_n := s - t + t_n$ とおく．$\{s_n\}$ は狭義単調減少の有理数列で s に収束する．各 n に対して，$\Gamma \in \mathcal{G}_{t_n}$ を任意にとると，$\{X_t\}$ の Markov 性から

$$\mathbb{E}_x\big[f(X_{s_n}); \Gamma\big] = \mathbb{E}_x\big[N_{s-t}f(X_{t_n}); \Gamma\big]$$

が任意の n について成り立つ．一方， $n \to \infty$ のとき $X_{s_n} \to Z_s$, $X_{t_n} \to Z_t$ より，$x \mapsto N_{s-t}f(x)$ の連続性を使うことで，上の両辺で $n \to \infty$ とすると，

$$\mathbb{E}_x\big[f(Z_s); \Gamma\big] = \mathbb{E}_x\big[N_{s-t}f(Z_t); \Gamma\big]. \tag{4.7}$$

さらに，上の等式において $t \mapsto N_t f(x)$ の右連続性を用いることで，$\{q_n\} \subset \mathbb{Q}$ で $q_n \downarrow s - t$ となるものを考えることにより，$s - t$ が有理数であるという条件は外すことができる．(4.7) は任意の $f \in \mathsf{C}$ に対して成り立つから，$f \in (\mathcal{B}_\Delta)_b$ に対しても成立させることができる (MCT に持ち込むとよい). 以上により，$(W, \mathcal{G}, \{\mathcal{G}_{t+}\}, \{Z_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}_x)$ は Markov 過程になることが示された．

次に，任意に $g \in (\mathcal{B}_\Delta)_b$, $f \in \mathsf{C}$, $t \in [0, \infty)$ かつ $s_n \downarrow t$ $(n \to \infty)$ を満たす有理数列 $\{s_n\}$ を考えると，

$$\mathbb{E}_x\big[f(X_{s_n})g(X_t)\big] = \mathbb{E}_x\big[N_{s_n - t}f(X_t)g(X_t)\big]$$

であるから，$n \to \infty$ とすると，

$$\mathbb{E}_x\big[f(Z_t)g(X_t)\big] = \mathbb{E}_x\big[f(X_t)g(X_t)\big]$$

が成り立つ．ここでも，MCT を用いることにより，

$$\mathbb{E}_x\big[h(Z_t, X_t)\big] = \mathbb{E}_x\big[h(X_t, X_t)\big]$$

が任意の有界な $\mathcal{B}_\Delta \times \mathcal{B}_\Delta$-可測函数 h に対して成立することが分かるから，$\mathbb{P}_x(X_t = Z_t) = 1$ が成り立つ (h として，例えば距離関数 d を考える).

Step 4. 証明の次の段階として，Ω を次のような関数 ω 全体とする：『 $\omega:[0,\infty]\to E_\Delta$ であって，$t\mapsto\omega(t)$ は $[0,\infty)$ の各点で右連続で，$(0,\infty)$ の各点で左極限が存在する．さらに，$\omega(\infty)=\Delta$ であって，また $\omega(t)=\Delta$ ならば，任意の $s\geq t$ に対して $\omega(s)=\Delta$ が成り立つ.』

すると，各 $w\in W$ に対して，$t\mapsto Z_t(w)$ は Ω に属する．但し，$Z_\infty(w)=\Delta$ と約束しておく．各 $\omega\in\Omega$ に対して，$Y_t(\omega)=\omega(t)$ と定め，さらに，すべての $t\in[0,\infty]$ に対して $\mathscr{F}_t^0:=\sigma(Y_s:s\leq t)$ とおく．このとき，写像 $\pi:W\to\Omega$ を $(\pi w)(t):=Z_t(w)$ と定義すると，$\pi^{-1}\mathscr{F}_\infty^0\subset\mathcal{G}$ かつ各 $t\in[0,\infty)$ に対して $\pi^{-1}\mathscr{F}_t^0\subset\mathcal{G}_{t+}$ が成り立つ (Z_t は $(\mathcal{G}_{t+})/\mathcal{B}_\Delta$-可測であった)．次に $\hat{\mathbb{P}}_x:=\mathbb{P}_x\pi^{-1}$ とおく． また，平行移動 $\theta_t:\Omega\to\Omega$ を $\theta_t\omega(s):=\omega(t+s)$ と定義する．このとき，$(\Omega,\mathscr{F}_\infty^0,\{\mathscr{F}_t^0\},Y_t,\theta_t,\hat{\mathbb{P}}_x)$ は，$P_t(x,A)$ を推移関数とする，$(E,\mathcal{B})$ を状態空間とする Markov 過程となることが示される．

さらに，注意 4.1 から，$\mathscr{F}_t^0,\mathscr{F}^0$ の完備化を考えることにより $(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},Y_t,\theta_t,\hat{\mathbb{P}}_x)$ は右連続な Markov 過程であることがわかるから，定理 4.1 によって強 Markov 性を持つこともわかる． 以下簡単のために $\hat{\mathbb{P}}_x$ の “ˆ” を外して考える．

Step 5. 最後に $\{Y_t\}$ の準左連続性を示す.

$\{\sigma_n\}$ を単調増加な停止時間の列，その極限を σ とおくとき，$\{\sigma<\infty\}$ 上で $Y_{\sigma_n}\to Y_\sigma$, $\mathbb{P}_x$-a.s. が成り立つことをいう．そのためには，σ は有界な停止時間として証明をすれば十分である．実際，有界な停止時間で証明ができれば，$\sigma_n\wedge\ell$, $\sigma\wedge\ell$ とおいて，$n\to\infty$ とした後 $\ell\to\infty$ とすればよい．ここで，Y_t は $(0,\infty)$ 上において左極限を持つことから，$\{\sigma<\infty\}$ 上 $Y_{\sigma\wedge\ell}\to Y_\sigma$, $\mathbb{P}$-a.s. $(\ell\to\infty)$ がなりたつことがわかる． その際には，ℓ は（ランダムでない時間変数) で極限を取る，すなわち，$\mathbb{Q}_+$ に沿って ∞ とすることに注意しておく．

そこで，まず σ は有界 (仮に，$\sigma\leq M<\infty$) とする．このとき，Y_t は $(0,\infty)$ の各点で左極限をもつから，$L:=\lim_{n\to\infty}Y_{\sigma_n}\,(\in E_\Delta)$ が存在する．また，$t>0$ に対しても $L_t:=\lim_{n\to\infty}Y_{\sigma_n+t}\,(\in E_\Delta)$ が存在することがわかる．さらに，十分大きい n に対しては， $\sigma_n+t\in[\sigma,\sigma+t]$ であることと，$t\mapsto Y_t$ が $[0,\infty)$ で右連続であることから，$\lim_{t\downarrow0}L_t=Y_\sigma$ となる．

そこで，$f,g\in\mathsf{C}$ および任意の $x\in E_\Delta$ に対して，$g(\Delta)=0$ であることに注意して，Markov 性を用いると

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\Big[f(L)g(Y_\sigma)\Big]&=\lim_{t\downarrow0}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_x\Big[f(Y_{\sigma_n})g(Y_{\sigma_n+t})\Big]\\&=\lim_{t\downarrow0}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_x\Big[f(Y_{\sigma_n})\mathbb{E}_{Y_t}\big[g(Y_{\sigma_n})\big]\Big]\\&=\lim_{t\downarrow0}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_x\Big[f(Y_{\sigma_n})\big(N_tg\big)(Y_{\sigma_n})\Big]\\&=\lim_{t\downarrow0}\mathbb{E}_x\Big[f(L)\big(N_tg\big)(L)\Big]=\mathbb{E}_x\Big[f(L)g(L)\Big]\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，再び MCT を用いることにより

$$\mathbb{E}_x\Big[h(L,Y_\sigma)\Big]=\mathbb{E}_x\Big[h(L,L)\Big]$$

が任意の $h\in(\mathcal{B}_\Delta\times\mathcal{B}_\Delta)_b$ に対して成立することがわかる．よって，

$$L=Y_\sigma,\quad \mathbb{P}_x\text{-a.s.}$$

が成り立つ．すなわち，準左連続性が示された. $\square$

Chapter 5

加法汎関数(AF)とその応用

E は局所コンパクトで可分な距離空間, $\mathcal{B}$ は E の位相的 Borel 集合の全体, m は E 上の正の Radon 測度で $\mathrm{supp}[m] = E$ をみたすものとし, $L^2(E;m)$ 上の正則な Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ と E 上の m-対称な Hunt 過程 $\mathsf{M} = (\Omega, \mathcal{M}, X_t, \zeta, \mathbb{P}_x)$ が与えられ, M の Dirichlet 形式が $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ であるとする. M の推移関数, Resolvent をそれぞれ $\{p_t; t \geq 0\}$, $\{R_\alpha, \alpha > 0\}$ で表す. E 上で定義された数値関数 f はいつも $f(\Delta) = 0$ と置いて E_Δ に拡張されているものとする.

$\{\mathscr{F}_t\}$ は M の許容する最小の完備なフィルトレーションを表す.

5.1 正値連続 AF と Revuz 測度

2 変数 $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$ の数値関数 $A_t(\omega)$ が M の**加法汎関数** (Additive Functional; AF) であるとは, 次の性質が満たされるときをいう:

(A.1) 各 $t \geq 0$ に対して $A_t(\cdot)$ は $\mathscr{F}_t$-可測.

(A.2) $\Lambda \in \mathscr{F}_\infty$ と適切除外集合 $N \subset E$ が存在して, 次の条件を満たす:

$$\mathbb{P}_x(\Lambda) = 1, \quad \forall x \in E \setminus N, \quad \theta_t \Lambda \subset \Lambda, \quad \forall t > 0. \tag{5.1}$$

任意の $\omega \in \Lambda$ に対して, $A_\cdot(\omega)$ は $[0,\infty)$ 上で右連続, $(0,\zeta(\omega))$ 上で左極限を持ち, $A_0(\omega) = 0$, $|A_t(\omega)| < \infty$, $\forall t < \zeta(\omega)$, $A_t(\omega) = A_{\zeta(\omega)}(\omega)$, $\forall t \geq \zeta(\omega)$, であり, 加法性

$$A_{t+s}(\omega) = A_t(\omega) + A_s(\theta_t \omega), \quad \forall\, t, s \geq 0 \tag{5.2}$$

が成り立つ.

この定義における Λ, N をそれぞれ加法汎関数 $A_t(\omega)$ の**定義集合** (defining set)**, 除外集合** (exceptional set) という. 特に除外集合 N として空集合が取れるとき, すなわちその定義集合 Λ が $\mathbb{P}_x(\Lambda) = 1$, $\forall x \in E$ を満たすように取れるとき, 加法汎関数 $A_t(\omega)$ は**狭義加法汎関数** (AF in the strict sense) と呼ばれる.

2 つの加法汎関数 $A_t(\omega)$, $B_t(\omega)$ が m-**同値**であるとは

$$\mathbb{P}_m(A_t \neq B_t) = 0, \quad \forall t > 0, \tag{5.3}$$

が成り立つことであり, このとき $A \sim B$ と記す. m-同値 "$\sim$" は加法汎関数の集合上の同値関係となることが分かる.

補題 5.1 加法汎関数 A, B が m-同値ならば, 両者に共通の定義集合 Λ と共通の除外集合 N を選んで

$$A_t(\omega) = B_t(\omega), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \omega \in \Lambda, \tag{5.4}$$

が成り立つようにできる.

Proof: 加法汎関数 $A_t(\omega)$, $B_t(\omega)$ の定義集合, 除外集合をそれぞれ Λ_A, N_A, Λ_B, N_B と表し

$$N_0 = N_A \cup N_B,\ \Lambda_0 = \Lambda_A \cap \Lambda_B,\ \Lambda_1 = \{A_t = B_t,\ \forall t > 0\},\ \Lambda = \Lambda_0 \cap \Lambda_1,$$

とおく．N_0 は適切除外集合であり，また $\theta_t(\Lambda) \subset \Lambda,\ \forall t > 0$ となることが簡単に分かる．また $x \in E \setminus N_0$ なら $\mathbb{P}_x(\Lambda_0^c) = 0$ だから

$$\mathbb{P}_x(\Lambda^c) \le \mathbb{P}_x(\Lambda_0^c) + \mathbb{P}_x(\Lambda_0 \setminus \Lambda_1) = \mathbb{P}_x(\Lambda_0 \setminus \Lambda_1).$$

$A_t(\omega)$, $B_t(\omega)$ の m-同値性の仮定と右連続性により，$g(x) = \mathbb{P}_x(\Lambda_0 \setminus \Lambda_1)$, $x \in E$, は m-a.e. に零に等しい．$g\big|_{E\setminus N_0}$ は M の $E \setminus N_0$ への制限である Hune 過程 $\mathsf{M}|_{E\setminus N_0}$ の超過関数であることが分かるから, 定理 3.6，補題 3.11 を $\mathsf{M}|_{E\setminus N_0}$ に適用すると, $g = 0$ q.e. on $E \setminus N_0$, 従って $g(x) = 0,\ \forall x \in E \setminus N_1$ がある m-極集合 N_1 に対して成立する．ゆえに，定理 3.8 より, $N_0 \cup N_1$ を含む適切除外集合 N が存在するから，Λ とこの N が求めるものである． □

加法汎関数 $A_t(\omega)$ はその定義集合 Λ に属す全ての ω に対して，$t \in [0,\infty)$ について $[0,\infty]$-値の連続関数となるとき, **正値連続**と呼ばれる．正値連続加法汎関数の全体を $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^{+}$ で表す．この節の目的は，滑らかな測度のクラス $\mathcal{S}$ を用いて，$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^{+}$ (詳しくは，$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^{+}$ の m-同値類の全体の集合 $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^{+}/\sim$) の特徴づけを行うことである．

まず，次の補題を示す．

補題 5.2 任意の $u \in \mathcal{F}$, $\nu \in \mathcal{S}_0$, $0 < T < \infty$ 及び $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\mathbb{P}_\nu\Big(\sup_{0\le t\le T}\big|\tilde{u}(X_t)\big| > \varepsilon\Big) \le \frac{e^T}{\varepsilon}\sqrt{\mathcal{E}_1(\nu)}\sqrt{\mathcal{E}_1(u,u)} \tag{5.5}$$

が成り立つ．ここで，$\mathcal{E}_1(\nu) = \mathcal{E}_1(U_1\nu, U_1\nu)$ であり，$U_1\nu$ は ν に関する 1-potential であった．

Proof: $\widetilde{u}$ を，u の Borel 可測な準連続修正とし，$B = \big\{x \in E:\ \big|\widetilde{u}(x)\big| > \varepsilon\big\}$ とおくと，(5.5) の左辺は $e^T\int_E p(x)\nu(dx)$ で抑えられる．但し，$p(x) = \mathbb{E}_x\big[e^{-\sigma_B}\big]$, $x \in E$ である．よって，定理 2.9 及び $p(x)$ が e_B の準連続修正であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\int_E p(x)\nu(dx) &= \mathcal{E}_1(p, U_1\nu) \le \sqrt{\mathcal{E}_1(\nu)}\ \sqrt{\mathrm{Cap}(B)} \\ &\le \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\mathcal{E}_1(\nu)}\ \sqrt{\mathcal{E}_1(u,u)}.\end{aligned}$$

□

補題 5.3 $\{u_n\} \subset \tilde{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{E}_1$-Cauchy 列とすると，適当な部分列 $\{n_k\}$ が存在して，

$$\mathbb{P}_x\Big(\ t \mapsto u_{n_k}(X_t)\ \text{は}\ [0,\infty)\ \text{の任意のコンパクト集合で一様収束する}\ \Big) = 1, \quad \text{q.e. } x \in E.$$

が成り立つ．

Proof: $\{u_n\}$ は $\mathcal{E}_1$-Cauchy だから，次の不等式を満たすように部分列 $\{n_k\}$ をとることが出来る：

$$\sqrt{\mathcal{E}_1\big(u_{n_k} - u_{n_{k+1}}, u_{n_k} - u_{n_{k+1}}\big)} < 2^{-2k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

任意の $T > 0$ 及び $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\Lambda_k := \Big\{\omega \in \Omega:\ \sup_{0\le t\le T}\big|u_{n_k}(X_t) - u_{n_{k+1}}(X_t)\big| > 2^{-k}\Big\}$ とおくと，補題 5.2 より $\mathbb{P}_\nu(\Lambda_k) \le e^T 2^{-k}\sqrt{\mathcal{E}_1(\nu)}$ が任意の $\nu \in \mathcal{S}_0$ に対して成り立つ．よって Borel-Cantelli の補題により，$\mathbb{P}_\nu\big(\limsup_{k\to\infty}\Lambda_k\big) = 0$ が成り立つ．$\nu \in \mathcal{S}_0$ は任意だから，定理 2.12 より $\mathbb{P}_x\big(\limsup_{k\to\infty}\Lambda_k\big) = 0$, q.e. が成り立つ． □

補題 5.4 (i) $A \in \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^{+}$ に対して，$\varphi(t) = \mathbb{E}_m[A_t]$, $t \ge 0$ とおく．$\varphi(t)$ はある $t > 0$ で有限ならば，全ての $t > 0$ で有限である．このとき $\varphi(t)$ は $t \in [0,\infty)$ に関して連続な凹関数である．

(ii) $A \in \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^{+},\ f \in \mathcal{B}_{+}$ に対して,

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_m\left[(f\cdot A)_t\right]\ \uparrow, \qquad t \downarrow 0 \tag{5.6}$$

が成り立つ．但し,

$$\big(f\cdot A\big)_t(\omega) := \int_0^t f(X_s(\omega))dA_s(\omega), \quad t \geq 0,\ \omega \in \Lambda$$

であり，Λ は $A_t(\omega)$ の定義集合を表す.

Proof: $\underline{\text{(i):}}$ $c_t(x) = \mathbb{E}_x[A_t],\ x \in E \setminus N$ とおくと, 加法汎関数の条件 (5.2) と Markov 性を用いると，任意の $t, s \geq 0$ に対して,

$$\varphi(t+s) = \mathbb{E}_m[A_{t+s}] = \mathbb{E}_m[A_t + A_s\circ\theta_t] = \mathbb{E}_m[A_t] + \mathbb{E}_m\big[\mathbb{E}_{X_t}[A_s]\big] = \varphi(t) + \mathbb{E}_m\big[c_s(X_t)\big]$$

となる，ここで，$\{p_t\}$ の m-対称性と劣 Markov 性 ($p_t 1 \leq 1$ m-a.e.) により,

$$\mathbb{E}_m\big[c_s(X_t)\big] = \int_E p_t c_s(x)m(dx) = \int_E c_s(x)p_t 1(x)m(dx) \leq \int_E c_s(x)m(dx) = \varphi(s)$$

である，よって,

$$\varphi(t+s) = \varphi(t) + \int_E p_t c_s(x)m(dx) \leq \varphi(t) + \varphi(s), \quad t, s \geq 0 \tag{5.7}$$

が成立することがわかる．これと $\varphi(t)$ が t の増加関数であることを合わせると (i) の最初の結論を得る.

次に $\varphi(t) < \infty,\ t \geq 0$ とする．このとき，明らかに $\varphi(t)$ は $t \geq 0$ の連続関数である．また，$0 < t < t',\ s > 0$ とすと，(5.7) より

$$\varphi(t'+s) - \varphi(t') = \int_E p_{(t'-t)+t}c_s(x)m(dx) = \int_E p_t c_s(x)\underbrace{p_{t'-t}1(x)}_{\leq 1}m(dx) \leq \int_E p_t c_s(x)m(dx) = \varphi(t+s) - \varphi(t)$$

が成り立つ．$t' = t+s$ とおくと

$$\varphi(t+2s) - \varphi(t+s) \leq \varphi(t+s) - \varphi(t); \quad \frac{1}{2}\Big(\varphi(t+2s) + \varphi(t)\Big) \leq \varphi(t+s)$$

が成り立つ．よって，任意の $0 < v < u$ に対して，$t := v,\ s := (u-v)/2$ とおくと，$t + 2s = u,\ t + s = (u+v)/2$ に注意することにより,

$$\frac{1}{2}\Big(\varphi(u) + \varphi(v)\Big) \leq \varphi\Big(\frac{u+v}{2}\Big),$$

となることから，φ は 2-凹であることがわかる．さらに，φ は連続より，凹関数であることがわかる.
$\underline{\text{(ii):}}$ $A \in \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^{+}$ とする．$f \in (\mathcal{B}_{+})_b$ のときは，$f\cdot A \in \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^{+}$ であることに注意する．実際，$A_t(\omega)$ の加法性と，Stieltjes 積分の定義によって,

$$\begin{aligned}\int_0^{s+t} f(X_u(\omega))dA_u(\omega) &= \int_0^t f(X_u(\omega))dA_u(\omega) + \int_t^{s+t} f(X_u(\omega))dA_u(\omega) \\ &= \int_0^t f(X_u(\omega))dA_u(\omega) + \Big(\int_0^s f(X_u)dA_u\Big)\circ\theta_t\omega\end{aligned}$$

が成り立ち，定義関数，除外集合は $A_t(\omega)$ のそれがおのおの対応するので，$f\cdot A \in \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^{+}$ であることがわかる．次に，$\varphi(t) = \mathbb{E}_m[(f\cdot A)_t]$ とおく．ある $t > 0$ で $\varphi(t) < \infty$ ならば，(i) により φ は $[0,\infty)$ 上で凹で，$\varphi(0) = 0$ である．よって，$0 < s < t$ ならば $\varphi(s) \geq \frac{s}{t}\varphi(t)$ が言えることから単調性 (5.6) が成り立つ．$\varphi(t) = \infty,\ \forall t > 0$ のときは自明である．一般の $f \in (\mathcal{B}_{+})_b$ に対しては, $f_n(x) = f(x) \wedge n,\ x \in E$ とおくと, $\mathbb{E}_m[(f_n\cdot A)_t] \uparrow \mathbb{E}_m[(f\cdot A)_t],\ n \to \infty$ より，f_n に対する (5.6) から f に対するそれが従う. □

定理 5.1 (i) $A \in \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^{+}$ に対して

$$\int_E f(x)\mu_A(dx) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\mathbb{E}_m\left[\int_0^t f(X_s)dA_s\right], \quad \forall f \in \mathcal{B}_{+} \tag{5.8}$$

を満たす $(E, \mathcal{B})$ 上の測度 μ_A が一意に存在する.

(ii) $A,\ B \in \boldsymbol{A_c^+}$, $A \sim B$ ならば $\mu_A = \mu_B$ である．$A \in \boldsymbol{A_c^+}$ に対して μ_A の半極集合上での値は零であり，また除外集合上での値も零である．

(iii) $A \in \boldsymbol{A_c^+}$, $f \in (\mathcal{B}_+)_b$ のとき，$f \cdot A \in \boldsymbol{A_c^+}$ に (i) の意味で対応する測度は $f \cdot \mu_A$ である．

(iv) $A \in \boldsymbol{A_c^+}$, $f \in \mathcal{B}_+$ に対して次式が成立する:

$$\int_E f(x)\mu_A(dx) = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha\mathbb{E}_m\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t)dA_t\right]. \tag{5.9}$$

Proof: <u>(i):</u> 補題 5.4 より，$B \in \mathcal{B}$ に対して (5.8) の右辺で $f = 1_B$ とおいたものを $\mu_A(B)$ と定義すると，単調収束極限の交換を行うことにより μ_A の完全加法性が得られるから $(E, \mathcal{B})$ 上の測度になることがわかる．更に μ_A は等式 (5.8) を満たすことも簡単に確かめられる．

<u>(ii), (iii):</u> 補題 5.1, 半極集合の性質 (定理 3.5), 除外集合の定義により (ii) は明らかである．(iii) は (i) から従う．

<u>(iv):</u> $f \in (\mathcal{B}_+)_b$ に対して示せばよい．$\varphi(t) = \mathbb{E}_m[(f\cdot A)_t]$ とおく．(Stieltjes 積分に対する) 部分積分を行うと，

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-\alpha s} f(X_s)dA_s &= e^{-\alpha t}\int_0^t f(X_s)dA_s - \int_0^t \Big(\int_0^s f(X_u)dA_u\Big)d(e^{-\alpha s})\\ &= e^{-\alpha t}\int_0^t f(X_s)dA_s + \alpha\int_0^t e^{-\alpha s}\Big(\int_0^s f(X_u)dA_u\Big)ds\end{aligned}$$

より，両辺 $\mathbb{P}_m$ に関して平均を取ると，

$$\mathbb{E}_m\left[\int_0^t e^{-\alpha s} f(X_s)dA_s\right] = e^{-\alpha t}\varphi(t) + \alpha\int_0^t e^{-\alpha s}\varphi(s)ds$$

となる．補題 5.4 により，ある $t > 0$ で $\varphi(t)$ が有限ならば，全ての $t > 0$ でそうであり，$\varphi(t) \le \varphi(1)\cdot t,\ t \ge 1$ となる．従って，このとき

$$\alpha\mathbb{E}_m\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} f(X_s)dA_s\right] = \alpha^2\int_0^\infty e^{-\alpha s}\varphi(s)ds < \infty. \tag{5.10}$$

$\alpha \to \infty$ のとき，この右辺は (5.8) により，増大して $\int_E f d\mu_A$ に収束する．$\varphi(t) = \infty,\ \forall t > 0$ のときは (5.9) は明らかである．

□

(5.8) で定まる測度 μ_A を $A \in \boldsymbol{A_c^+}$ の **Revuz 測度**という．この測度は D. Revuz によって 1970 年に導入されたものである．以下，この μ_A が滑らかな測度になること，さらには μ_A を通じて，$\boldsymbol{A_c^+}/\sim$ と $\mathcal{S}$ の間に 1 対 1 の対応関係があることを示す．

定理 5.2 (i) 任意の $A \in \boldsymbol{A_c^+}$ に対して，$\mu_A \in \mathcal{S}$ である．

(ii) 任意の $\mu \in \mathcal{S}$ に対して，$\mu_A = \mu$ を満たす $A \in \boldsymbol{A_c^+}$ が m-同値性を除いて一意的に存在する．

(iii) $A \in \boldsymbol{A_c^+}$ と $\mu \in \mathcal{S}$ に対する次の 3 条件は互いに同値である：

(a) $\mu_A = \mu$

(b) 任意の $f, h \in \mathcal{B}_+$ に対して，

$$\mathbb{E}_{h\cdot m}\left[\int_0^t f(X_s)dA_s\right] = \int_0^t \Big(\int_E p_s h(x)f(x)\mu(dx)\Big)ds, \quad \forall t > 0. \tag{5.11}$$

(c) 任意の $f, h \in \mathcal{B}_+$ に対して

$$\mathbb{E}_{h\cdot m}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} f(X_s)dA_s\right] = \int_E R_\alpha h(x)f(x)\mu(dx), \quad \forall\alpha > 0. \tag{5.12}$$

以下，次の記号を用意する：$A \in \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^{+}$，$f \in \mathcal{B}_b$ に対して

$$U_A^\alpha f(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t) dA_t\right], \quad \alpha > 0,\ x \in E \setminus N, \tag{5.13}$$

$$R_\alpha^A f(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-A_t} f(X_t) dt\right], \quad \alpha > 0,\ x \in E \setminus N. \tag{5.14}$$

ただし，N は A の除外集合を表す.

Proof of (定理 5.2) (i): $A \in \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^{+}$ とし，N を A の除外集合とする． 至る所正である $f \in (\mathcal{B}_+)_b \cap L^2(E;,m)$ に対して，$\varphi(x) := R_1^A f(x),\ x \in E$ とおくと，$\varphi(x) > 0,\ x \in E \setminus N$ である．恒等式 $e^{A_t} - 1 = \int_0^t e^{A_s} dA_s$ に注意すると，

$$\begin{aligned}
R_\alpha f(x) - R_\alpha^A f(x) &= \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\big(1 - e^{-A_t}\big) f(X_t) dt\Big] \\
&= \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-A_t}\Big(\int_0^t e^{A_s} dA_s\Big) f(X_t) dt\Big] \\
&= \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty \Big(\int_s^\infty e^{-\alpha t} e^{-A_t} f(X_t) dt\Big) e^{A_s} dA_s\Big] \\
&= \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha s}\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-A_t \circ \theta_s} f(X_t \circ \theta_s) dt\Big) dA_s\Big] \\
&= \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha s} \mathbb{E}_{X_s}\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-A_t} f(X_t) dt\Big] dA_s\Big] = U_A^\alpha R_\alpha^A f(x)
\end{aligned} \tag{5.15}$$

だから，

$$R_1 f(x) - R_1^A f(x) = U_A^1 \varphi(x)$$

が成り立つ．また，$U_A^1 R_1^A f$ および $R_1 f$ はともに $\mathsf{M}|_{E \setminus N}$ において 1-超過関数であることがわかるから，ともに細連続である．よって，その差で表されている φ も細連続となるから，補題 3.14 により準連続となることがわかる．従って，適当な単調増大な閉集合列 $\{F_n\}$ で，$\mathrm{Cap}(E \setminus F_n) \to 0\ (n \to \infty)$，$N \subset \bigcap_{n=1}^\infty \big(E \setminus F_n\big)$ かつ 各 n に対して $\varphi|_{F_n}$ が連続関数となるものが存在する．そこで，

$$C_n := \Big\{x \in F_n :\ \varphi(x) \geq \frac{1}{n}\Big\}$$

とおくと，$\{C_n\}$ は単調増大な巣となる． 実際，$B_n = \{x \in E \setminus N : \varphi(x) \leq 1/n\}$, $\sigma_n := \sigma_{B_n}$, $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$ とすると，φ は $E \setminus N$ において細連続であることから，$x \in E \setminus N$ に対して

$$\mathbb{E}_x\Big[\int_{\sigma_n}^\zeta e^{-t} f(X_t) e^{-A_t} dt\Big] = \mathbb{E}_x\big[e^{-\sigma_n} e^{-A_{\sigma_n}} \varphi(X_{\sigma_n})\big] \leq \frac{1}{n}.$$

ここで，f が至る所正であることから，$n \to \infty$ とすれば $\mathbb{P}_x(\sigma < \zeta) = 0,\ x \in E \setminus N$ を得る．一方，$E \setminus C_n \subset (E \setminus F_n) \cup B_n$ に注意すると，

$$\mathbb{P}_x\Big(\lim_{n\to\infty} \sigma_{E \setminus C_n} \geq \sigma \wedge \lim_{n\to\infty} \sigma_{E \setminus F_n} \geq \zeta\Big) = 1, \quad x \in E \setminus N$$

が成り立つから，補題 3.13 より $\{C_n\}$ は巣となることがわかる．

定理 5.1(ii) より，μ_A は除外集合上では零となることから μ_A は (S.1) を満たす．また，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$A_t^n(\omega) := (1_{C_n} \cdot A)_t(\omega) = \int_0^t 1_{C_n}(X_s(\omega)) dA_s(\omega)$$

とおくと，$A^n \in \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^{+}$ であり，$1_{C_n}\mu_A$ が A^n に対応する Revuz 測度と等しくなるが，

$$\begin{aligned}
U_{A^n}^1 1(x) &= \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-t} 1_{C_n}(X_t) dA_t\Big] \\
&= U_A^1 1_{C_n}(x) \leq n U_A^1 \varphi(x) = n U_A^1 R_A^1 f(x) \\
&= n\big(R_1 f(x) - R_1^A f(x)\big) \leq n R_1 f(x), \quad \alpha > 0, x \in E \setminus N
\end{aligned}$$

である．また，(5.15) と同様の計算を行うことで

$$U_A^\alpha f(x) - U_A^\beta f(x) + (\alpha-\beta)R_\alpha U_A^\beta f(x) = 0, \quad x \in E\setminus N,\ \alpha,\beta>0 \tag{5.16}$$

が成立することがわかるから，

$$U_A^\beta f(x) = U_A^1 f(x) - \beta R_\beta U_A^1 f(x) + R_\beta U_A^1 f(x)$$

に注意して，$\beta R_\beta 1(x) \le 1$ 及び R_β の m-対称性により，

$$\begin{aligned}\int_E U_A^\beta 1_{C_n}(x)m(dx) &= \int_E U_A^1 1_{C_n}(x)m(dx) - \int_E \beta R_\beta U_A^1 1_{C_n}(x)m(dx) + \int_E R_\beta U_A^1 1_{C_n}(x)m(dx)\\ &= \int_E U_A^1 1_{C_n}(x)m(dx) - \int_E U_A^1 1_{C_n}(x)\beta R_\beta 1(x)m(dx) + \int_E R_\beta U_A^1 1_{C_n}(x)m(dx)\\ &\le \int_E U_A^1 1_{C_n}(x)R_\beta 1(x)m(dx)\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}\mu_A(C_n) &= \lim_{\beta\to\infty}\beta\int_E \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-\beta t}1_{C_n}(X_t)dA_t\Big]m(dx) = \lim_{\beta\to\infty}\beta\int_E U_A^\beta 1_{C_n}(x)m(dx)\\ &\le \limsup_{\beta\to\infty}\int_E U_A^1 1_{C_n}(x)\beta R_\beta 1(x)m(dx) \le n\int_E R_1 f(x)m(dx) < \infty\end{aligned}$$

となることから，(S.2) が示された．ゆえに，$\mu_A \in \mathcal{S}$ であることがわかった．

次に (ii) を示すことにするが，いくつかの段階に分けて示すことにする．

Step 1. $\mu \in \mathcal{S}_0$ に対して，$U_A^1 1(x) = U_1\mu(x)$, m-a.e. を満たす有限な $A \in \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^+$ が存在することを示す．但し，$U_1\mu$ は μ の 1-potential である．

まず，$U_1\mu$ は $\mathcal{F}$ に属し, かつ $\{T_t : t>0\}$ に関して 1-超過関数であるから，$U_1\mu$ の準連続修正で非負値で有限な Borel 可測函数 u と適当な適切除外集合 N がとれて，

$$nR_{n+1}u(x) \nearrow u(x),\ n\to\infty,\ x\in E\setminus N, \qquad u(x)=0, \quad x\in N$$

を満たすようにできる．このとき，各 n に対して，

$$g_n(x) := \begin{cases} n\big(u(x) - nR_{n+1}u(x)\big), & x\in E\setminus N,\\ 0, \quad x\in N\end{cases}$$

とおくと，$R_1 g_n(x) \nearrow u(x)$, $n\to\infty$, $x\in E\setminus N$ 及び $\mathcal{E}_1(R_1g_n - u, R_1g_n - u) \to 0$, $n\to\infty$ が成り立つことを確認できる．各 n に対して, 汎関数 $\widetilde{A}_n$ を

$$\widetilde{A}_n(t,\omega) := \int_0^t e^{-s}g_n(X_s(\omega))ds, \quad t\ge 0,\ \omega\in\Omega$$

によって定義する．任意の $\nu\in\mathcal{S}_{00}$ に対して，

$$\mathbb{E}_\nu\Big[\big(\widetilde{A}_n(\infty) - \widetilde{A}_\ell(\infty)\big)^2\Big] \le 2M_\nu\sqrt{\mathcal{E}_1(\mu)}\|R_1g_n - R_1g_\ell\|_{\mathcal{E}_1} \tag{5.17}$$

が成り立つことを示す．ただし，$M_\nu = \|U_2\nu\|_\infty$ である．一般性を失わずに $\nu\in\mathcal{S}_{00}$ は E 上の確率測度として考えてよい．各 $n,\ell\,(n>\ell)$ に対して $g_{n,\ell} = g_n - g_\ell$ とおき, (5.17) の左辺を書き直すと

$$\begin{aligned}&2\mathbb{E}_\nu\left[\int_0^\infty e^{-s}g_{n,\ell}(X_s)ds\int_s^\infty e^{-u}g_{n,\ell}(X_u)du\right] = 2\mathbb{E}_\nu\left[\int_0^\infty e^{-2s}(g_{n,\ell}\cdot R_1g_{n,\ell})(X_s)ds\right]\\ &= 2\langle\nu, R_2(g_{n,\ell}R_1g_{n,\ell})\rangle = 2\langle U_2\nu, g_{n,\ell}R_1g_{n,\ell}\rangle \le 2\langle U_2\nu, g_nR_1g_{n,\ell}\rangle\\ &\le 2M_\nu(g_n, R_1g_n - R_1g_\ell) = 2M_\nu\mathcal{E}_1(R_1g_n, R_1g_n - R_1g_\ell)\end{aligned}$$

となる．Schwarz の不等式を適用して，

$$\|R_1g_n\|_{\mathcal{E}_1}^2 = (g_n, R_1g_n) \le (g_n, f) = \langle \mu, R_1g_n\rangle \le \langle \mu, f\rangle = \mathcal{E}_1(\mu)$$

に注意すると，(5.17) を得る． 一方，

$$\mathbb{E}_\nu\left[\widetilde{A}_n(\infty)\middle|\mathscr{F}_t\right] = \widetilde{A}_n(t) + e^{-t}E_{X_t}[\widetilde{A}_n(\infty)] = \widetilde{A}_n(t) + e^{-t}R_1g_n(X_t)$$

だから

$$M_n(t) := \widetilde{A}_n(t) + e^{-t}R_1g_n(X_t), \quad 0 \le t \le \infty \tag{5.18}$$

は，$\nu \in \mathcal{S}_{00}$ に対して $(\{\mathscr{F}_t\}, \mathbb{P}_\nu)$-martingale だから，Doob の不等式により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\mathbb{P}_\nu\left(\sup_{0\le t\le\infty}|M_n(t) - M_\ell(t)| > \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}_\nu\left[(\widetilde{A}_n(\infty) - \widetilde{A}_\ell(\infty))^2\right] \tag{5.19}$$

が成り立つ．そこで部分列 $\{n_k\}$ を $\|R_1g_{n_{k+1}} - R_1g_{n_k}\|_{\mathcal{E}_1} \le 2^{-3k}$ を満たすように選び,

$$\Lambda_k = \left\{\sup_{0\le t\le\infty}|M_{n_k}(t) - M_{n_{k+1}}(t)| > 2^{-k}\right\}$$

とおくと，(5.17) と (5.19) より $\mathbb{P}_\nu(\Lambda_k) \le 2M_\nu\sqrt{\mathcal{E}_1(\mu)}2^{-k}$ が成り立つ．よって，Borel-Cantelli の補題により $\mathbb{P}_\nu\Big(\limsup_{k\to\infty}\Lambda_k\Big) = 0,\ \forall\nu \in S_{00}$ となる．従って，定理 2.12 により $\mathbb{P}_x\Big(\limsup_{k\to\infty}\Lambda_k\Big) = 0$ が q.e. $x \in E$ について成立することが分かる.

これと表示 (5.18) および補題 5.3 を合わせると，適当な部分列 $\{n_k\}$ と適切除外集合 $\widetilde{N} \supset N$ が存在して，$\mathbb{P}_x(\Lambda) = 1,\ \forall x \in E \setminus \widetilde{N}$ が成立する．ここに

$$\Lambda = \Big\{\omega \in \widetilde{\Omega} :\ \widetilde{A}_{n_k}(\infty, \omega) < \infty,\ t \mapsto \widetilde{A}_{n_k}(t, \omega) \text{ は } [0,\infty) \text{ の任意のコンパクト集合で一様収束する }\Big\}.$$

ただし $\widetilde{\Omega}$ は (3.22) において $\tilde{E} = E \setminus \widetilde{N}$ とおいて得られる Ω の部分集合である.

ここで，$\omega \in \Lambda$ のとき $\widetilde{A}(t,\omega) := \lim_{k\to\infty}\widetilde{A}_{n_k}(t,\omega)$, $\omega \notin \Lambda$ のとき $\widetilde{A}(t,\omega) := 0$ とおく．さらに $A(t,\omega) = \int_0^t e^s d\widetilde{A}(s,\omega),\ t \in [0,\infty]$ とおくと，$A_t(\omega)$ は Λ を定義集合，$\widetilde{N}$ を除外集合とする M の正値連続加法汎関数となる.

次に，任意の $\nu \in \mathcal{S}_{00}$ 及び $h \in (\mathcal{B}_+)_b$ に対して，

$$\begin{aligned}
\int_E U_A^1 1(x)h(x)\nu(dx) &= \int_E \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-t}dA_t\Big]h(x)\nu(dx) \ = \int_E \mathbb{E}_x\big[\widetilde{A}(\infty)\big]h(x)\nu(dx)\\
&= \lim_{n_k\to\infty}\int_E \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-s}g_{n_k}(X_s)ds\Big]h(x)\nu(dx) = \lim_{n_k\to\infty}\int_E R_1g_{n_k}(x)h(x)\nu(dx)\\
&= \int_E u(x)h(x)\nu(dx) = \int_E U_1\mu(x)h(x)\nu(dx)
\end{aligned}$$

が成り立つことから，定理 2.12 より $U_A^1 1 = U_1\mu$ q.e. となる．したがって，$U_A^1 1 = U_1\mu$ m-a.e. が成り立つこともわかる.

Step 2. $\mu \in \mathcal{S}_0$ に対して，Step 1. において構成した $A \in \boldsymbol{A}_c^+$ に対応する Revuz 測度は μ と一致する： $\mu_A = \mu$.

まず，Step 1. で示した $U_A^1 1 = U_1\mu$ m-a.e. が，任意の $\alpha > 0$ に対して $U_A^\alpha 1 = U_\alpha\mu$ m-a.e. が成り立つことを示そう．$\mu \in \mathcal{S}_0$ であるから，任意の $\alpha, \beta > 0$ に対して，

$$\int_E \tilde{v}(x)\mu(dx) = \mathcal{E}_\beta(U_\beta\mu, v) = \mathcal{E}_\alpha(U_\alpha\mu, v), \quad v \in \mathcal{F}$$

が成り立つことから，

$$U_\alpha\mu - U_\beta\mu + (\alpha - \beta)G_\alpha U_\beta\mu = 0$$

が成り立つことが分かる．よって，この式と (5.16) において $\beta=1$ とおいて $U_A^1 1 = U_1\mu \ \ m$-a.e. を用いると，$U_A^\alpha 1 = U_\alpha\mu \ \ m$-a.e. が成り立つ．

次に，任意の $f\in(\mathcal{B}_+)_b$ に対して，$U_A^\alpha f = U_\alpha(f\cdot\mu) \ \ m$-a.e. を示す．

そのためは，$\mu(\partial G)=0$ を満たす $G\in\mathcal{B}$ に対して，$f=1_G$ のときを示せば十分です．(i) における証明と同様に $\varphi(x)=\mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha t}1_G(X_t)dAt\Big]$，$\psi(x)=\mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha t}1_{E\setminus G}(X_t)dAt\Big]$ とおくと，いずれも 1-超過関数であり，$\varphi+\psi=U_A^\alpha 1=U_\alpha\mu$ を満たす．従って，定理 2.10, 補題 2.19 により，φ,ψ は，それぞれ適当な測度 $\lambda,\nu\in\mathcal{S}_0$ の α-potential の準連続修正となることがわかる．一方，強 Markov 性を用いることにより

$$\varphi(x)=\mathbb{E}_x\Big[\int_{\sigma_G}^\infty e^{-\alpha t}1_G(X_t)dA_t\Big]=\mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma_G}\varphi(X_{\sigma_G})\big]=H_G^\alpha\varphi(x),$$

$$\psi(x)=\mathbb{E}_x\Big[\int_{\sigma_{E\setminus G}}^\infty e^{-\alpha t}1_{E\setminus G}(X_t)dA_t\Big]=\mathbb{E}_x\big[e^{-\alpha\sigma_{E\setminus G}}\varphi(X_{\sigma_{E\setminus G}})\big]=H_{E\setminus G}^\alpha\psi(x)$$

となることから $\mathrm{supp}[\lambda]\subset\overline{G}$, $\mathrm{supp}[\nu]\subset E\setminus G$ である．また，$\lambda+\nu=\mu$ より， $\lambda=1_G\cdot\mu$ であることが分かる．ゆえに，定理 5.1(ii) より，$\tilde{A}_t:=(1_G\cdot A)_t=\int_0^t 1_G(X_s)dA_s$ に対して $U_{\tilde{A}}^\alpha 1=U_\alpha(1_G\cdot\mu)$ が成り立つが，

$$U_\alpha(1_G\cdot\mu)(x)\big(=U_\alpha(\lambda)(x)\big)=U_{\tilde{A}}^\alpha 1(x)=\mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha t}d\tilde{A}_t\Big]=\mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha t}1_G(X_t)dA_t\Big]=U_A^\alpha 1_G(x)$$

である．故に，任意の $f\in(\mathcal{B}_+)_b$ に対して，$U_A^\alpha f=U_\alpha(f\cdot\mu)$, m-a.e. が成立する．よって，任意の $\alpha>0, v\in(\mathcal{B}_+)_b\cap L^2(E;m)$ 及び $f\in(\mathcal{B}_+)_b$ に対して，

$$\int_E R_\alpha v(x)f(x)\mu(dx)=\mathcal{E}(U_\alpha(f\cdot\mu),G_\alpha v)=\int_E U_\alpha(f\cdot\mu)(x)v(x)m(dx)=\int_E U_A^\alpha f(x)v(x)m(dx) \tag{5.20}$$

が成り立つ．ここで，コンパクト集合の増加列 $\{F_n\}$ で正則巣となるものをとり，$v_n=1_{F_n}$，$f\in C_0(E)$，$f\geq 0$ とおくと

$$\alpha\int_E R_\alpha 1_{F_n}(x)f(x)\mu(dx)=\alpha\int_{F_n}U_A^\alpha f(x)m(dx)=\alpha\mathbb{E}_{1_{F_n}\cdot m}\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(X_t)dA_t\Big],\quad n\in\mathbb{N}.$$

よって，$n\to\infty$ とするとき $v_n\nearrow 1_E$ q.e. となること，さらには $\alpha\to\infty$ のとき $\alpha R_\alpha 1_E(x)\to 1$ となることに注意すると，上の式ではじめに $n\to\infty$, その後 $\alpha\to\infty$ とすることにより

$$\int_E f(x)\mu(dx)=\int_E f(x)\mu_A(dx)$$

が成り立つことが分かり，f の任意性から $\mu=\mu_A$ が成立する．

Step 3. $\mu\in\mathcal{S}$ に対して $\mu_A=\mu$ を満たす $A\in\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^+$ が存在して，更に m-同値性を除いて一意であることを示す．

まず，$\mu\in\mathcal{S}_{00}$ の場合について，$\mu_A=\mu$ を満たす $A\in\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^+$ の存在は Step 1 で示しているので，A の一意性が成り立つことを示そう．そこで，$A,B\in\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^+$ で，$\mu_A=\mu_B=\mu$ を満たすものを取る．$U_1\mu$ の Borel 可測な準連続修正を f とする．Step 2. により，$U_A^1 1=U_B^1 1=U_1\mu=f$, q.e. が成り立つ． 次に， $\tilde{A}_t=\int_0^t e^{-s}dA_s$, $\tilde{B}_t=\int_0^t e^{-s}dB_s$, $t\in[0,\infty]$ と定める．

$$g_A(x)=\mathbb{E}_x\big[(\tilde{A}_\infty)^2\big],\quad g_B(x)=\mathbb{E}_x\big[(\tilde{B}_\infty)^2\big],\quad g_{AB}(x)=\mathbb{E}_x\big[\tilde{A}_\infty\cdot\tilde{B}_\infty\big]$$

とおくと

$$g_A(x)=2U_A^2 f,\quad g_B(x)=2U_B^2 f,\quad g_{AB}(x)=U_A^2 f+U_B^2 f,\quad \text{q.e.}$$

が成り立つ．例えば，

$$\begin{aligned}g_{AB}(x)&=\mathbb{E}_x\Big[\Big(\int_0^\infty e^{-t}dA_t\Big)\Big(\int_0^\infty e^{-t}dB_t\Big)\Big]=\mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty\Big(\int_0^\infty e^{-(t+s)}dA_t\Big)dB_t\Big]\\&=\mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty\Big(\int_0^s e^{-(s+t)}dA_t+\int_s^\infty e^{-(s+t)}dA_t\Big)dB_s\Big]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty \int_0^s e^{-(s+t)} dA_t dB_s\Big] + \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty \int_s^\infty e^{-(s+t)} dA_t dB_s\Big] \\
&= \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty \int_t^\infty e^{-(s+t)} dB_s dA_t\Big] + \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty \int_s^\infty e^{-(s+t)} dA_t dB_s\Big] \\
&= \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-2t}\mathbb{E}_{X_t}\Big[\int_0^\infty e^{-s} dB_s\Big] dA_t\Big] + \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-2s}\mathbb{E}_{X_s}\Big[\int_0^\infty e^{-t} dA_t\Big] dB_s\Big] \\
&= \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-2t} U_B^1 1(X_t) dA_t\Big] + \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-2t} U_A^1 1(X_s) dB_s\Big] \\
&= \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-2t} f(X_t) dA_t\Big] + \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-2t} f(X_s) dB_s\Big] = U_A^2 f(x) + U_B^2 f(x), \quad \text{q.e.}
\end{aligned}
$$

である．ほかの等式も同様に導出できる．次に $h \in (\mathcal{B}_+)_b$ を至る所正である m-可積分な関数とすると，(5.20) により，

$$
\begin{aligned}
\int_E g_{AB}(x)h(x)m(dx) &= \int_E U_A^2 f(x)h(x)m(dx) + \int_E U_B^2 f(x)h(x)m(dx) \\
&= 2\int_E R_2 h(x) f(x)\mu(dx) \le \|h\|_\infty \|f\|_\infty \mu(E) < \infty.
\end{aligned}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
&\int_E g_A(x)h(x)m(dx) = 2\int_E R_2 h(x) f(x) m(dx) \le \|h\|_\infty \|f\|_\infty \mu(E) < \infty, \\
&\int_E g_B(x)h(x)m(dx) = 2\int_E R_2 h(x) f(x) m(dx) \le \|h\|_\infty \|f\|_\infty \mu(E) < \infty
\end{aligned}
$$

が成立する．従って，

$$
\mathbb{E}_{h\cdot m}\Big[\big(\tilde{A}(\infty) - \tilde{B}(\infty)\big)^2\Big] = \int_E \big(g_A(x) - 2g_{AB}(x) + g_B(x)\big)h(x)m(dx) = 0
$$

となることから，$\mathbb{P}_{h\cdot m}\big(\tilde{A}(\infty) \ne \tilde{B}(\infty)\big) = 0$ が成り立つ．一方，任意の $t \ge 0$ に対して，$\tilde{A}(\infty) = \tilde{A}(t) + e^{-t}\tilde{A}(\infty)\circ\theta_t$ であること，さらには $\|f\|_\infty < \infty$ に注意すると $\mathbb{P}_{h\cdot m}\big(\tilde{A}(t) \ne \tilde{B}(t)\big) = 0$ となり，これにより Gronwall の補題を用いることにより A, B の m-同値性を導出することが出来る．

次に，$\mu \in \mathcal{S}$ について存在を示そう．定理 2.13 により，適当なコンパクト巣 $\{F_n\}$ が存在して，各 n について $\mu^n := 1_{F_n}\cdot\mu \in \mathcal{S}_{00}$ となる．ところで，各 n に対して，$\mu^n = \mu_{A^n}$ を満たす $A^n \in \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^+$ が存在する．定理 5.1(iii) により，$1_{F_n}\cdot A^{n+1}$ に対応する Revuz 測度は $1_{F_n}\cdot\mu^{n+1} = \mu^n$ に等しいから，上で示したことにより，各 n について，$1_{F_n}\cdot A^{n+1}$ と A^n は m-同値である．そこで，各 n に対して A^n の定義集合 Λ_n, 適切除外集合 N_n に対して，$\Lambda = \bigcap_{n=1}^\infty \Lambda_n$，$N = \bigcup_{n=1}^\infty N_n$ とおくと， それぞれ A^n に共通の定義集合，適切除外集合となる：

$$
\big(1_{F_n}\cdot A^{n+1}\big)(t,\omega) = A^n(t,\omega), \quad t \ge 0,\ \omega \in \Lambda,\ n \ge 1.
$$

一方，$\{F_n\}$ は (コンパクト) 巣であるから，定理 3.10 によって，必要なら Λ, N を取り直して，

$$
\sigma(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{E\setminus F_n} \ge \zeta(\omega), \quad \forall\omega \in \Lambda
$$

が成り立つとしてよい．そこで，$F_0 = \varnothing$ として

$$
A_t(\omega) = \begin{cases} A_t^{(k)}(\omega), & \sigma_{E\setminus F_{k-1}} \le t < \sigma_{E\setminus F_k},\ k = 1, 2, \cdots \\ A_{\sigma(\omega)-}(\omega), & t \ge \sigma(\omega) \end{cases}
$$

とおくと, A は Λ, N を定義集合, 除外集合とする M の正値連続加法汎関数である．$k < \ell$ のとき $A^{(k)} = 1_{F_k}\cdot A^{(\ell)}$ だから $\ell \to \infty$ として $A^{(k)} = 1_{F_k}\cdot A$ が得られ，$1_{F_k}\cdot\mu_A = 1_{F_k}\cdot\mu$, $\forall k \ge 1$. 従って $\mu_A = \mu$ である．

最後に $\mu \in \mathcal{S}$ に対して $A, B \in \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^+$ が $\mu_A = \mu_B = \mu$ を満たすとする．上のように $\mu^{(k)} = 1_{F_k}\cdot\mu \in S_{00}$ を満たす巣 $\{F_k\}$ を取ると，$\mu_{1_{F_k}\cdot A} = \mu_{1_{F_k}\cdot B} = \mu^{(k)}$ だから, Step 2 の結果より，$1_{F_k}\cdot A$ と $1_{F_k}\cdot B$ は m-同値となる．k は任意だから A, B は m-同値である．

(iii) の証明は省略する．[詳しくは，マルコフ過程 (福島正俊・竹田雅好著) の §5.4 を参照のこと]

□

5.2 Martingale AF とエネルギー零の AF

(E,ρ) は前節と同じ，局所コンパクトな可分距離空間， m を $(E,\mathcal{B})$ 上の至る所正となる Radon 測度とする．$\mathbb{M}=(\Omega,\mathscr{F}_t,X_t,\mathbb{P}_x)$ を $(E,\mathcal{B})$ を状態空間とする m-対称な Hunt 過程とし，対応する Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は正則であると仮定する．

$\mathbb{M}$ の加法汎関数 $A_t(\omega)$ に対して, その**エネルギー** $\mathbf{e}(A)$ を

$$\mathbf{e}(A)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\mathbb{E}_m[A_t^2] \tag{5.21}$$

で定義する．また, 加法汎関数 $A_t(\omega)$, $B_t(\omega)$ に対して，その**相互エネルギー** $\mathbf{e}(A,B)$ を

$$\mathbf{e}(A,B)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\mathbb{E}_m[A_tB_t] \tag{5.22}$$

で定義する．どちらの場合も, 一般には右辺の極限が存在するとは限らないが存在するときにのみ考える．

この節では，いくつかの種類の加法汎関数を考える．

5.2.1 Dirichlet 関数から生成される AF

各 $u\in\mathcal{F}$ に対して,

$$A_t^{[u]}=\tilde{u}(X_t)-\tilde{u}(X_0) \tag{5.23}$$

とおくと，準連続修正 $\tilde{u}$ は q.e. の意味で一意的に決まることから，$A^{[u]}$ は m-同値の意味で一意的に決まる．

このとき，$A^{[u]}$ のエネルギーを求める．まず,

$$\begin{aligned}0 &\le \liminf_{t\to 0}\frac{1}{2t}\mathbb{E}_m[(\tilde{u}(X_t)-\tilde{u}(X_0))^2]\\ &= \liminf_{t\to 0}\left\{\frac{1}{t}(u-p_tu,u)-\frac{1}{2t}(1-p_t1,u^2)\right\}\end{aligned} \tag{5.24}$$

となるから,

$$\limsup_{t\to 0}\frac{1}{2t}(1-p_t1,u^2)\le\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(u-p_tu,u)=\mathcal{E}(u,u) \tag{5.25}$$

が成り立つ. このことより, 任意のコンパクト集合 $K\subset E$ に対して,

$$\sup_{0<t<\infty}\frac{1}{t}\int_K(1-p_t1)(x)dm(x)<\infty$$

が分かる．すなわち，測度の族 $\big\{(1/t)(1-p_t1)\cdot m\big\}_{t>0}$ は K の上で一様に有界である．従って，部分列 $t_n\downarrow 0$ が存在して, 測度列 $(1/t_n)(1-p_{t_n}1)\cdot m$ は，ある正の Radon 測度 k に漠収束することが，Riesz-Markov の定理と Banach-Alaoglu の定理を組み合わせることで示すことができる． すなわち測度 k は, 任意の $v\in\mathcal{F}\cap C_0(X)$ に対して

$$\int_E v^2dk=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n}(1-p_{t_n}1,v^2)\le 2\mathcal{E}(v,v) \tag{5.26}$$

を満たす. 特に, 各コンパクト集合 K に対して,

$$\int_E|v|1_Kdk\le k(K)^{1/2}\left(\int_E v^2dk\right)^{1/2}\le(2k(K))^{1/2}\mathcal{E}(v,v)^{1/2}.$$

よって, $1_K\cdot k\in\mathcal{S}_0$ であり, k は滑らかな測度 $(k\in\mathcal{S})$ となる．さらに Fatou の補題より, 準連続関数 $\tilde{v}\in\mathcal{F}$ に対しても (5.26) は成り立つ.

任意の準連続修正 $\tilde{u}\in\mathcal{F}$ に対して, $\mathcal{E}_1$ の位相で，かつ q.e. に各点収束する列 $v_l\in\mathcal{F}\cap C_0(X)$ をとる．(5.25) より

$$\left|\left(\int\tilde{u}^2dk\right)^{1/2}-\left(\frac{1}{t_n}(1-p_{t_n}1,u^2)\right)^{1/2}\right|$$

$$\leq 2\mathcal{E}(u-v_l,u-v_l)^{1/2}+\left|\left(\int_E v_l^2dk\right)^{1/2}-\left(\frac{1}{t_n}(1-p_{t_n}1,v_l^2)\right)^{1/2}\right|$$

となるが，(5.26) から右辺は任意に小さくできる．よって

$$\int_E \tilde{u}^2dk=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n}(1-p_{t_n}1,u^2),\quad \forall u\in\mathcal{F} \tag{5.27}$$

が示された． 従って，

$$\mathbf{e}(A^{[u]})=\mathcal{E}(u,u)-\frac{1}{2}\int_E\tilde{u}^2dk$$

が得られる．すなわち， $A^{[u]}$ のエネルギーは有限に定まる．

5.2.2 Martingale AF

Hunt 過程 M の加法汎関数 $M_t(\omega)$ が Martingale Additive Functional (MAF) であるとは, 各 $t>0$ に対して

$$\mathbb{E}_x[M_t^2]<\infty,\quad \mathbb{E}_x[M_t]=0,\ \text{ q.e. } x\in E \tag{5.28}$$

が満たされることである．このとき加法性と Markov 性から，等式

$$\mathbb{E}_x\left[M_{t+s}|\mathscr{F}_s\right]=\mathbb{E}_x\left[M_s+M_t\circ\theta_s|\mathscr{F}_s\right]=M_s+\mathbb{E}_{X_s}[M_t]=M_s,\ \mathbb{P}_x\text{-a.s.}$$

が成り立つことから，M_t は q.e. x に対して，$\mathbb{P}_x$-martingale となる．M の MAF の全体を $\mathcal{M}$ で表す. $\mathcal{M}$ の元 $M_t(\omega)$ は，写像 $t\mapsto\mathbb{E}_m[M_t^2]$ が劣加法性 ($\mathbb{E}_m[M_{t+s}^2]\leq\mathbb{E}_m[M_t^2]+\mathbb{E}_m[M_s^2],\ t,s\geq 0$) 満たすことがわかるから，

$$\mathbf{e}(M)=\sup_{t>0}\frac{1}{2t}\mathbb{E}_m[M_t^2]\,(\leq\infty) \tag{5.29}$$

は ($+\infty$ も込めて) 定まる．そこで，

$$\mathring{\mathcal{M}}:=\left\{M\in\mathcal{M}:\ \mathbf{e}(M)<\infty\right\}$$

とおく．$\mathring{\mathcal{M}}$ の元は，エネルギー有限でかつ 2 乗可積分な martingale AF となっている．ここで，一般論により，$M\in\mathring{\mathcal{M}}$ に対して，

$$\mathbb{E}_x\left[\langle M\rangle_t\right]=\mathbb{E}_x\left[M_t^2\right],\quad \text{q.e. } x\in E,\ \ t>0 \tag{5.30}$$

を満たす $\langle M\rangle\in\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^+$ が m-同値性を除いて一意に定まることが知られている．$\langle M\rangle$ のことを M の 2 **次変分** (quadratic variation) または sharp bracket という．

$\langle M\rangle\in\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^+$ であるから，$\langle M\rangle$ に対応する Revuz 測度を $\mu_{\langle M\rangle}$ で表す． Revuz 測度の定義 (5.8)，2 次変分の特徴づけ (5.30)，及びエネルギーの定義 (5.29) より，

$$\mathbf{e}(M)=\frac{1}{2}\mu_{\langle M\rangle}(E),\quad M\in\mathcal{M} \tag{5.31}$$

が成り立つ．

$M,L\in\mathcal{M}$ に対して，所謂，極化恒等式にならって

$$\langle M,L\rangle_t(\omega):=\frac{1}{2}\Big\{\langle M+L\rangle_t(\omega)-\langle M\rangle_t(\omega)-\langle L\rangle_t(\omega)\Big\}$$

と定義すると，$\langle M,L\rangle_t(\omega)$ は連続な AF であり，t に関して局所的に有界変動であり，また次を満たすことがわかる：

$$\mathbb{E}_x[M_tL_t]=\mathbb{E}_x\left[\langle M,L\rangle_t\right],\quad t>0,\ \text{ q.e. } x\in E. \tag{5.32}$$

さらに，

$$\mu_{\langle M,L\rangle}(A):=\frac{1}{2}\left\{\mu_{\langle M+L\rangle}(A)-\mu_{\langle M\rangle}(A)-\mu_{\langle L\rangle}(A)\right\},\quad A\in\mathcal{B}$$

で定義される符号付き測度 $\mu_{\langle M,L\rangle}$ は，連続加法汎関数 $\langle M,L\rangle_t(\omega)$ と次の意味で関係している:

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\mathbb{E}_{h\cdot m}\left[(f\cdot\langle M,L\rangle)_t\right]=\int_E f(x)h(x)\mu_{\langle M,L\rangle}(dx).$$

但し， f は任意の非負値の Borel 可測函数，h は γ-超過関数 ($\gamma\geq 0$) である．

定理 5.3 $\{M^{(n)}\}\subset \overset{\circ}{\mathcal{M}}$ を $\mathbf{e}$ に関して Cauchy とすると，一意的に $M\in\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ が存在して $\lim_{n\to\infty}\mathbf{e}(M^{(n)}-M)=0$ となる．また, 適当な部分列 $\{n_k\}$ が存在して $\lim_{k\to\infty}M_t^{(n_k)}=M_t$ が q.e. の x に対して $\mathbb{P}_x$-a.s. に， t に関して局所一様に収束する.

Proof: (5.31) より $\langle M\rangle\in \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}^+$ の Revuz 測度の全測度 $\mu_{\langle M\rangle}(E)$ は $2\mathbf{e}(M)$ に等しい．また，martingale 不等式から，任意の $\nu\in\mathcal{S}_{00}$ に対して，不等式

$$\mathbb{P}_\nu\Big(\sup_{0\le s\le T}|M_s|>\lambda\Big)\le\frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}_\nu[M_T^2]\le\frac{2}{\lambda^2}(1+T)\|U_1\nu\|_\infty\mathbf{e}(M) \tag{5.33}$$

が成り立つことが分かる．実際，一つ目の不等式は martingale 不等式により分かる．後半の不等式について，まず，各 $t>0$ 及び非負値概 Borel 可測函数 f に対して $c_t(x)=\mathbb{E}_x[A_t]$, $x\in E$ とおくと，$\mathbb{E}_{f\cdot m}[A_t]:=\int_0^t\int_E p_sf(x)\mu(dx)ds,\ t\ge 0$ であるから，$s<t$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}\big(c_t-p_sc_t,c_t\big)&=\frac{1}{s}\int_E\Big(\int_0^t\big(p_uc_t(x)-p_{s+u}c_t(x)\big)du\Big)\mu(dx)\\&=\frac{1}{s}\int_E\Big(\int_0^s p_uc_t(x)du\Big)\mu(dx)-\frac{1}{s}\int_E\Big(\int_t^{s+t}p_uc_t(x)du\Big)\mu(dx)\end{aligned}$$

が成り立つことから， $s\downarrow 0$ とすると，右辺は $\int_E\big(c_t(x)-p_tc_t(x)\big)\mu(dx)$ に収束する．よって，$c_t\in\mathcal{F}$ が分かり，

$$\mathcal{E}(c_t,u)=\int_E\tilde{u}(x)\mu(dx)-\int_E p_tu(x)\mu(dx),\quad u\in\mathcal{F}$$

を得る．よって，$\nu\in\mathcal{S}_{00}$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu[A_t]&=\int_E c_t(x)\nu(dx)=\mathcal{E}_1(c_t,U_1\nu)=\int_E\big(U_1\nu(x)-p_tU_1\nu(x)\big)\mu(dx)+(c_t,U_1\nu)\\&\le\|U_1\|_\infty\Big(\mu(E)+\int_E c_t(x)m(dx)\Big)\end{aligned}$$

より，$\int_E c_t(x)m(dx)\le t\mu(E)$ に注意すると (5.33) の二つ目の不等式を得る．

次に，部分列 $\{n_k\}$ を $\mathbf{e}(M^{(n_{k+1})}-M^{(n_k)})<2^{-3k}$ を満たすようにとり, $\lambda=2^{-k}$, $M_t=M_t^{(n_{k+1})}-M_t^{(n_k)}$ として (5.33) を用いると

$$\mathbb{P}_\nu\Big(\sup_{0\le s\le T}|M_s^{(n_{k+1})}-M_s^{(n_k)}|>2^{-k}\Big)\le 2(1+T)\|U_1\nu\|_\infty 2^{-k}$$

となる． よって，Borel-Cantelli の補題より

$$\Lambda=\limsup_{k\to\infty}\Lambda_k,\qquad \Lambda_k=\{\sup_{0\le s\le T}|M_s^{(n_{k+1})}-M_s^{(n_k)}|>2^{-k}\}$$

とおくとき, $\mathbb{P}_\nu(\Lambda)=0$ が成り立つ．$\nu\in\mathcal{S}_{00}$ は任意であるから，定理 2.12 より $\mathbb{P}_x(\Lambda)=0$, q.e. x であり，$\omega\notin\Lambda$ に対して， $\lim_{k\to\infty}M_s^{(n_k)}(\omega)=M_s(\omega)$ が $[0,T]$ 上の一様収束極限として存在する．また 不等式 (5.33) より, この収束は $L^2(\mathbb{P}_\nu)$ の意味でも成り立つので, $\mathbb{E}_\nu(M_t^2)<\infty$ かつ $\mathbb{E}_\nu[M_t]=0$. よって $\mathbb{E}_x(M_t^2)<\infty$, $\mathbb{E}_x[M_t]=0$ q.e. x が成り立つ. 従って, $M\in\overset{\circ}{\mathcal{M}}$. さらに Fatou の補題より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2t}\mathbb{E}_m\left[(M_t^{(n)}-M_t)^2\right]&\le\liminf_{k\to\infty}\frac{1}{2t}\mathbb{E}_m\left[(M_t^{(n)}-M_t^{(n_k)})^2\right]\\&\le\liminf_{k\to\infty}\mathbf{e}(M^{(n)}-M^{(n_k)})\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, $\mathbf{e}(M^{(n)}-M)\le\liminf_{k\to\infty}\mathbf{e}(M^{(n)}-M^{(n_k)})$ であり, $\{M_t^{(n)}\}$ が e-Cauchy 列であることから右辺は $n\to\infty$ のとき 0 に収束する. □

5.2.3 エネルギー零の CAF

連続加法汎関数 $N_t(\omega)$ が

$$\text{任意の } t>0 \text{ に対して } \mathbb{E}_x\big[|N_t|\big]<\infty,\ \text{q.e. } x,\quad \mathbf{e}(N)=0 \tag{5.34}$$

を満たすとき, **エネルギー零の連続加法汎関数** (Continuous AF of zero energy) と呼び，その全体を $\mathcal{N}_c$ で表す.

$\mathcal{N}_c$ の元 $N_t(\omega)$ は，次の意味で 2 次変分が退化することがわかる：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{[nT]}\mathbb{E}_m\Big[\big(N_{(k+1)/n}-N_{k/n}\big)^2\Big]=0.$$

実際，Markov 性，推移関数の m-対称性を使い，さらには N のエネルギーは零になることから,

$$\sum_{k=1}^{[nT]}\mathbb{E}_m\Big[\big(N_{(k+1)/n}-N_{k/n}\big)^2\Big]=\sum_{k=1}^{[nT]}\mathbb{E}_m\Big[\mathbb{E}_{X_{k/n}}\big[N_{1/n}^2\big]\Big]\le nT\,\mathbb{E}_m[N_{1/n}^2]\to 0\ (n\to\infty)$$

なるからである.

例題 5.1 $L^2(E;m)$ に属する概 Borel 可測函数 f に対して,

$$N_t(\omega):=\int_0^t f(X_s(\omega))ds,\quad \omega\in\Omega,\ t>0$$

と定義すると，$N\in\mathcal{N}_c$ である.

Proof: 実際，各 $t>0$ に対して

$$\mathbb{E}_x\Big[\int_0^t|f(X_s)|ds\Big]\le e^tR_1|f|(x)<\infty,\quad \text{q.e.}$$

が成り立つことから，N は CAF であることがわかる. さらに，Fubini の定理及び Markov 性を使うと,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_m[N_t^2]&=2\mathbb{E}_m\Big[\int_0^t f(X_s)\int_s^t f(X_u)duds\Big]\ =2\mathbb{E}_m\Big[\int_0^t\int_0^{t-s}f(X_s)p_uf(X_s)duds\Big]\\&=2\int_0^t\int_0^{t-s}\int_E p_s(f\cdot p_uf)(x)m(dx)\ =2\int_0^t\int_0^{t-s}\Big(\int_E p_s1(x)f(x)p_uf(x)m(dx)\Big)duds\end{aligned}$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2t}\mathbb{E}_m[N_t^2]&=\frac{1}{t}\int_0^t\int_0^{t-s}\int_E p_s1(x)f(x)p_uf(x)m(dx)duds\\&\le\frac{1}{t}\int_0^t\int_0^{t-s}\int_E|p_s1(x)|\cdot|f(x)p_uf(x)|m(dx)duds\\&\le\frac{1}{t}\int_0^t\int_0^{t-s}(|f|,|p_uf|)_mduds\le\frac{1}{t}\int_0^t\int_0^{t-s}\|f\|_{L^2}\|p_uf\|_{L^2}duds\le\frac{t}{2}\|f\|_{L^2}\end{aligned}$$

となるから，N はエネルギー零であることが分かった. □

5.3 福島分解と Lyons-Zheng 分解

まず，福島分解公式を述べるために補題を一つ用意する.

補題 5.5 $\mathcal{A}:=\mathring{\mathcal{M}}+\mathcal{N}_c$ とおくと，$\mathcal{A}$ はエネルギー有限な AF の作る線形空間であり，また，$\mathring{\mathcal{M}}\cap\mathcal{N}_c=\{0\}$ が成立することから,

$$A_t=M_t+N_t,\quad M\in\mathring{\mathcal{M}},\ N\in\mathcal{N}_c \tag{5.35}$$

の表現は一意的である. ここで 0 は恒等的に 0 となる AF を表す.

Proof: 線形性は明らかである．$\mathring{\mathcal{M}} \cap \mathcal{N}_c = \{0\}$ を確認する．これにより表現の一意性は従う．そこで，$M \in \mathring{\mathcal{M}}$ をエネルギー零の CAF とする．すると，M の Revuz 測度は退化する：

$$\mathbf{e}(M) = \frac{1}{2}\mu_{\langle M \rangle}(E) = 0$$

よって，$M = 0$ である． □

$A, B \in \mathcal{A}$ に対して，**相互エネルギー** $\mathbf{e}(A,B)$ を

$$\mathbf{e}(A,B) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2t}\mathbb{E}_m[A_t B_t] \tag{5.36}$$

によって定義する．このとき，$\mathbf{e}(A,B) = 0$ ならば，A または B が $\mathcal{N}_c$ の元になることが Schwarz の不等式によってわかる．したがって，

$$\mathbf{e}(A) = \mathbf{e}(M), \quad \text{for } A = M + N,\ M \in \mathring{\mathcal{M}},\ N \in \mathcal{N}_c$$

が成立する．

定理 5.4 (Fukushima decomposition) 任意の $u \in \mathcal{F}$ に対して，一意的に $M^{[u]} \in \mathring{\mathcal{M}}$ と $N^{[u]} \in \mathcal{N}_c$ が存在して

$$A_t^{[u]} = \tilde{u}(X_t) - \tilde{u}(X_0) = M_t^{[u]} + N_t^{[u]}, \quad \mathbb{P}_x\text{-a.s., q.e. } x \in E \tag{5.37}$$

が成り立つ．

Proof: 一意性は先の補題より明らか．以下，分解の存在性を示す．まず，f を $L^2(E;m)$ の元であって概 Borel 可測関数とする．$u = R_1 f \in \mathcal{F}$ とおくと，$N_t^{[u]}$ を

$$N_t^{[u]} := \int_0^t (u(X_s) - f(X_s))ds$$

で定義して，$M_t^{[u]} = A_t^{[u]} - N_t^{[u]}$ とおくと，例題 5.1 より $N^{[u]} \in \mathcal{N}_c$ であり，$M^{[u]} \in \mathcal{M}$ も簡単に分かるが，$e(A^{[u]}) < \infty$ だから，$M^{[u]} \in \mathring{\mathcal{M}}$ である．

一般の $u \in \mathcal{F}$ に対しては, 関数列 $u_n = R_1 f_n$ で $\mathcal{E}_1(u_n - u, u_n - u) \to 0$ を満たすものをとる．$A^{[u_n]} = M^{[u_n]} + N^{[u_n]}$ を上で与えられた分解とすると，補題 5.3 より部分列 $\{n_k\}$ を適当に取れば，q.e. $x \in E$ に対して，$\mathbb{P}_x$-a.s. に $A_t^{[u_{n_k}]}$ は $A_t^{[u]}$ に局所一様に収束する．さらに，

$$\mathbf{e}(M^{[u_m]} - M^{[u_n]}) = \mathbf{e}(A^{[u_m]} - A^{[u_n]}) \leq \mathcal{E}(u_m - u_n, u_m - u_n)$$

であるので，定理 5.3 により，適当な部分列 $M^{[u_{n_k}]}$ はある $M^{[u]} \in \mathring{\mathcal{M}}$ に，$\mathbf{e}$-収束かつ局所一様に収束する． □

福島分解に現れるエネルギー零の連続加法汎関数 $N^{[u]}$ は，一般には有界変動な確率過程とはならず解析は難しい．そこで Hunt 過程の対称性に着目して $N^{[u]}$ を消し去ることを考える．それが，今から述べる Lyons-Zheng 分解と呼ばれるものである．

以下，議論を簡単にするために，Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が局所性を持つと仮定する．言い換えると M の標本路が連続であるという拡散過程が対応するものを考える．

$T > 0$ を任意にとり固定する．このとき，時間反転作用素 r_T を

$$X_t(r_T\omega) = X_{T-t}(\omega), \quad 0 \leq t \leq T < \zeta(\omega) \tag{5.38}$$

で定義する．

補題 5.6 任意の $\mathscr{F}_T$-可測集合 Λ に対して

$$\mathbb{P}_m\Big(r_T\omega \in \Lambda : T < \zeta\Big) = \mathbb{P}_m(\Lambda : T < \zeta). \tag{5.39}$$

が成り立つ．

Proof: 任意の $0 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} \le T,\ f_1, f_2, \cdots, f_{n-1} \in \mathcal{B}_b$ に対して，Markov 性と補題 3.7 により

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_m\Big[f_1(X_{s_1})f_2(X_{s_2})\cdots f_{n-1}(X_{s_{n-1}})1_E(X_T)\Big] \\
&= \int_E p_{s_1}\big(f_1 p_{s_2-s_1}(f_2\cdots p_{s_{n-1}-s_{n-2}}(f_{n-1}p_{T-s_{n-1}}1_E))\big)dm \\
&= \int_E p_{T-s_{n-1}}(f_{n-1}p_{s_{n-1}-s_{n-2}}(f_{n-2}\cdots p_{s_2-s_1}(f_1 p_{s_1}1_E)))dm \\
&= \mathbb{E}_m\Big[f_{n-1}(X_{T-s_{n-1}})f_{n-2}(X_{T-s_{n-2}})\cdots f_1(X_{T-s_1})1_E(X_T)\Big].
\end{aligned}$$

ここで，

$$H = \Big\{F \in (\mathscr{F}_T^0)_b :\ \mathbb{E}_m[F\circ r_T;\ T<\zeta] = \mathbb{E}_m[F;\ T<\zeta]\Big\}$$

とおくと，H は上の型の関数を含む線形空間で，一様有界な単調増加極限を取る操作に関して閉じていることが分かる，よって，単調族定理により，任意の $\Lambda \in \mathscr{F}_T^0$ に対して (5.39) が成立する．$\Lambda \in \mathscr{F}_T$ に対しても成立することは明らかである．

□

定理 5.5 (Lyons-Zheng decomposition (I))

$u \in \mathcal{F}$ に対して

$$A_t^{[u]} = \frac{1}{2}M_t^{[u]} + \frac{1}{2}(M_{T-t}^{[u]}(r_T) - M_T^{[u]}(r_T)),\ 0 \le t \le T < \zeta,\ \mathbb{P}_m\text{–a.s.} \tag{5.40}$$

Proof: Fukushima decomposition: $u(X_t) - u(X_0) = M_t^{[u]} + N_t^{[u]}$ に, 時間反転作用素 r_T を作用させることにより

$$u(X_{T-t}) - u(X_T) = M_t^{[u]}(r_T) + N_t^{[u]}(r_T),\ \ \mathbb{P}_m\text{-a.s.} \tag{5.41}$$

を得る．$u = R_1 f$ の場合であれば, $N_t^{[u]} = \int_0^t (u-f)(X_s)ds$ であるから,

$$N_t^{[u]}(r_T) = \int_0^t (u-f)(X_s\circ r_T)ds = \int_{T-t}^T (u-f)(X_s)ds = N_T^{[u]} - N_{T-t}^{[u]} \tag{5.42}$$

となり，$M_t^{[u]}(r_T) = u(X_{T-t}) - u(X_T) - N_T^{[u]} + N_{T-t}^{[u]}$ が成立する．従って,

$$\begin{aligned}
M_{T-t}^{[u]}(r_T) - M_T^{[u]}(r_T) &= \Big(u(X_t) - u(X_T) - N_T^{[u]} + N_t^{[u]}\Big) - \Big(u(X_0) - u(X_T) - N_T^{[u]}\Big) \\
&= u(X_t) - u(X_0) + N_t^{[u]} = 2u(X_t) - 2u(X_0) - M_t^{[u]}
\end{aligned}$$

となり，定理 5.5 が導かれる．一般の $u \in \mathcal{F}$ については，$\mathcal{E}_1(u - R_1 f_n, u - R_1 f_n) \to 0\ (n\to\infty)$ となる $\{f_n\} \subset L^2(E;m) \cap \mathcal{B}_b$ を取り，補題 5.3 及び定理 5.3 が成立するような部分列 $\{n_k\}$ が存在することを用いて示すことができる．

□

式 (5.41) において, t に $T-t$ を代入すると

$$u(X_t) = u(X_T) + M_{T-t}^{[u]}(r_T) + N_{T-t}^{[u]}(r_T) \tag{5.43}$$

が成立する．従って．上の式と (5.37) の和を考えると

$$u(X_t) = \frac{1}{2}(u(X_0) + u(X_T)) + \frac{1}{2}(M_t^{[u]} + M_{T-t}^{[u]}(r_T)) + \frac{1}{2}(N_t^{[u]} + N_{T-t}^{[u]}(r_T))$$

となることがわかる．一方，式 (5.42)) より $N_T^{[u]} = N_t^{[u]} + N_{T-t}^{[u]}(r_T)$ であるから，次の等式を得る．

定理 5.6 (Lyons-Zheng decomposition (II))

$u \in \mathcal{F}$ に対して,

$$u(X_t) = \frac{1}{2}\big(u(X_0) + u(X_T)\big) + \frac{1}{2}\Big(M_t^{[u]} + M_{T-t}^{[u]}(r_T)\Big) + \frac{1}{2}N_T^{[u]},\quad 0 \le t \le T < \zeta,\ \ \mathbb{P}_m\text{-a.s.} \tag{5.44}$$

ここで，後の応用のために，2 乗可積分 martingale の Brown 運動による表現定理について簡単に述べておく． そのために，言葉を用意しておく．

定義 5.1 $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ を完備な確率空間とし，$\{\mathcal{M}_t\}$ を $\mathcal{M}$ のフィルトレーションとする．各 $\mathcal{M}_t$ は $\mathcal{M}$ の $\mathbb{P}$-零集合すべてを含むものとし，さらには右連続性を仮定する: $\mathcal{M}_t = \mathcal{M}_{t+}\big(:= \bigcap_{s>t} \mathcal{M}_s\big)$.

このとき，確率過程 $\{Y_t\}$ が $(\Omega, \mathcal{M}, \{\mathcal{M}_t\}, \mathbb{P})$ 上の**局所 2 乗可積分** martingale であるとは，適当な $\{\mathcal{M}_t\}$-停止時間の増大列 $\{\sigma_n\}$ が存在して，$\mathbb{P}(\sigma_n < \infty,\ \sigma_n \nearrow \infty) = 1$ かつ，各 n について $Y^n = (Y_{t\wedge\sigma_n})_{t\geq 0}$ が 2 乗可積分な $\{\mathcal{M}_t\}$-martingale となることをいう．ここで，Y^n は martingale なので，右連続修正が存在することから，初めから右連続ものを考える（フィルトレーション $\{\mathcal{M}_t\}$ は $\mathcal{M}$ に関して完備化されていることに注意する）．

定理 5.7 $(\Omega, \mathcal{M}, \{\mathcal{M}_t\}, \mathbb{P})$ 上の連続な局所 2 乗可積分 martingales $M^i = (M^i_t)_{t\geq 0},\ i = 1, 2, \ldots, d$ が,

$$\langle M^i, M^j \rangle_t = \delta_{ij} t, \quad i, j = 1, 2, \ldots, d$$

を満たすとし，$B(0)$ を $\mathcal{M}_0$-可測な d 次元確率変数とする．このとき，$B(t) = B(0) + M(t)$ とおくと，$B = B(t)$ は, $\{\mathcal{M}_t\}$ に適合した Brown 運動である．

Proof: $\xi \in \mathbb{R}^d$ を固定して，関数 $F(x) = e^{i\xi\cdot x},\ x \in \mathbb{R}^d$ を考えると，$F \in C^2_b(\mathbb{R}^d)$ より Itô の公式から,

$$\begin{aligned}
F(B_t) - B(B_0) &= \sum_{j=1}^{d} \int_0^t F_{x_j}(B_s) dM^j_s + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d} \int_0^t F_{x_j x_k}(B_s) d\langle M^j, M^k \rangle_s \\
&= \sum_{j=1}^{d} \int_0^t F_{x_j}(B_s) dM^j_s + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} \int_0^t F_{x_j x_j}(B_s) ds \\
&= \sum_{j=1}^{d} \xi_j \int_0^t e^{i\xi\cdot B_s} dM^j_s - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} \xi_j^2 \int_0^t e^{i\xi\cdot B_s} ds
\end{aligned}$$

となる．右辺の第一項は $\{\mathcal{M}_t\}$ に関する martingale であることに注意すると，$t > s \geq 0, A \in \mathcal{M}_s$ に対して,

$$\mathbb{E}\big[e^{i\xi\cdot B_t}; A\big] - \mathbb{E}\big[e^{i\xi\cdot B_s}; A\big] = -\frac{1}{2}|\xi|^2 \mathbb{E}\Big[\int_s^t e^{i\xi\cdot B_u}\, du; A\Big],$$

すなわち,

$$\mathbb{E}\big[e^{i\xi\cdot(B_t - B_s)}; A\big] - \mathbb{P}(A) = -\frac{1}{2}|\xi|^2 \mathbb{E}\Big[\int_s^t e^{i\xi\cdot(B_u - B_s)} du; A\Big]$$

が成り立つことがわかる．よって,

$$\mathbb{E}\big[e^{i\xi\cdot(B_t - B_s)}; A\big] = \mathbb{P}(A) e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2 (t-s)}$$

を得る．また，これがすべての $A \in \mathcal{M}_s$ に対して成立することから,

$$\mathbb{E}\Big[e^{i\xi\cdot(B_t - B_s)} \big| \mathcal{M}_s\Big] = e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2 (t-s)}.$$

ゆえに，これは $\{B_t\}$ が d-次元 $\{\mathcal{M}_t\}$-Brown 運動であること示している． □

定理 5.8 (連続 martingale の表現定理)

$M = (M_t)_{t\geq 0}$ を $(\Omega, \mathcal{M}, \{\mathcal{M}_t\}, \mathbb{P})$ 上の連続な局所 2 乗可積分 martingale とする．さらに，M の 2 次変分過程 $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t)_{t\geq 0}$ が

$$\lim_{t\to\infty} \langle M \rangle_t = \infty, \quad \mathbb{P}\text{-}a.s.$$

を満たすとする．このとき，$\tau_t = \inf\{u \geq 0 : \langle M \rangle_u > t\}$ とおくと，$Y_t := M_{\tau_t}$ は 1 次元 $\{\mathcal{M}_{\tau_t}\}$-Brown 運動となる．したがって，特に $M_t = M(t)$ は 1 次元 Brown 運動 $B_t = B(t)$ によって $M_t = B(\langle M \rangle_t)$ と表現される．

定理を証明するために補題を一つ用意する．

補題 5.7 $A = A(t)$ を，連続で単調増加過程で $A(0) = 0$ を満たすものとし，

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \infty, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

を満たすとする．各 $t \geq 0$ に対して，

$$\tau_t := \inf\{u \geq 0 : \ A(u) > t\}$$

と定義する．このとき，以下のことが成り立つ：

(i) $\{\tau_t\}$ は右連続で単調増加過程であり，$\lim_{t\uparrow\infty} \tau_t = \infty$，$\mathbb{P}$-a.s. をみたす．

(ii) $A(\tau_t) = t,\ 0 \leq t < \infty$.

(iii) $\tau_{A(t)} = \sup\big\{u \geq t : A(u) = A(t)\big\},\ 0 \leq t < \infty$.

(iv) $0 \leq s, t < \infty$ に対して，$A(t) > s$ であることと $\tau_s < t$ であることとは同値であり，さらに $\tau_s \leq t$ であるならば $s \leq A(t)$ が成り立つ．

Proof: (i): 写像 $t \mapsto \tau_t$ の単調増加性及び極限 $\lim_{t\uparrow\infty} \tau_t = \infty$，$\mathbb{P}$-a.s. が成り立つことは明らかである．よって，右連続性だけを示す．これは $\lim_{\theta\downarrow t} \tau_\theta \leq \tau_t$ を示せば十分である．そこで，$u = \tau_t$ とおく．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $A(u+\varepsilon) > t$ が成立する．また，$t < \theta < A(u+\varepsilon)$ ならば $\tau_\theta \leq u + \varepsilon$ である．ゆえに $\lim_{\theta\downarrow t} \tau_\theta \leq \tau_t$ を得る．

(ii): 任意の $t \in [0, \infty)$ に対して $u = \tau_t$ とおくと，

$$A(u+\varepsilon) > t, \quad \forall \varepsilon > 0$$

であるから，$\varepsilon \downarrow 0$ とすると $t \mapsto A(t)$ の連続性により，$A(\tau_t) = A(u) \geq t$ となる．次に，$A(0) = 0$ より $u = \tau_t = 0$ ならば，$A(\tau_0) = A(0) = 0$. そこで，$u = \tau_t > 0$ とする．$0 < \varepsilon < u$ を満たす任意の ε に対して，$A(u-\varepsilon) \leq t$ である．よって，$\varepsilon \downarrow 0$ とすれば $A(\tau_t) = A(u) \leq t$ となる．

(iii): τ_t の定義により明らかである．実際，$t \geq 0$ に対して $u = A(t)$ とおき，$\alpha := \sup\{s \geq t : A(s) = A(t)\}$ とすると，任意の $\alpha' < \alpha$ に対して，$A(s) = u (= A(t))$ を満たす $s \geq t$ が存在して $s > \alpha'$ を満たす．よって，$A = A(t)$ の単調増加性により，$u = A(s) \geq A(\alpha')$ となる． すると，τ_u の定義から $\alpha' \leq \tau_u$ となり，$\alpha \leq \tau_u = \tau_{A(t)}$ が成立することがわかる．一方，(ii) より $A(\tau_u) = u = A(t)$ であることから，α の定義により $\tau_u \leq \alpha$ でなければならない．よって，$\alpha = \tau_u = \tau_{A(t)}$ となる．

(iv): $0 < s, t < \infty$ に対して，$A(t) > s$ を仮定すると，τ_s の定義により，$\tau_s \leq t$ が成り立つ．$\tau_s = t$ となるならば，(ii) より，$s = A(\tau_s) = A(t)$ が成り立ち，矛盾である．よって $\tau_s < t$ でなければならない．次に，$\tau_s < t$ とすると，$A(s_0) > s$ となる適当な $s_0 \geq 0$ が存在して $s_0 < t$ を満たす．再び A の単調性を使うと，$s < A(s_0) \leq t$ となる．後半の主張も同様に示せる． □

Proof (of 定理 5.8): 一般に，連続な局所 2 乗可積分な martingale $M = (M_t)_{t\geq 0}$ の 2 次変分過程 $\langle M\rangle = (\langle M\rangle_t)$ は連続である．よって，上の補題により，$\tau_t = \inf\{u \geq 0 : \langle M\rangle_u > t\}$ とおくと $\{\tau_s < t\} = \{\langle M\rangle_t > s\} \in \mathcal{M}_t$ より，τ_s は (各 s に対して) $\{\mathcal{M}_t\}$-停止時間である．一方，$\mathcal{G}_t := \mathcal{M}_{\tau_t}$ とおくと，$\{\langle M\rangle_t \leq s\} = \{\tau_s \geq t\} \in \mathcal{M}_{\tau_s} = \mathcal{G}_s$ であることもわかるから，(各 t に対して) $\langle M\rangle_t$ は $\{\mathcal{G}_s\}$-停止時間であることもわかる．

次に，$0 \leq s_1 < s_2 < \infty$ に対して，martingale $\{\tilde{M}_t := M_{t\wedge\tau_{s_2}},\ \mathcal{M}_t, 0 \leq t < \infty\}$ を考えると，

$$\langle \tilde{M}\rangle_t = \langle M\rangle_{t\wedge\tau_{s_2}} \leq \langle M\rangle_{\tau_{s_2}} = s_2, \quad 0 \leq t < \infty$$

が成り立つことから，$\{\tilde{M}_t\}$ 及び $\{\tilde{M}_t^2 - \langle\tilde{M}\rangle_t\}$ はともに一様可積分であることがわかる．従って，最適停止定理によって，$Y_t := M_{\tau_t}$ に対して，

$$\mathbb{E}\big[Y_{s_2} - Y_{s_1} | \mathcal{G}_{s_1}\big] = \mathbb{E}\big[\tilde{M}_{\tau_{s_2}} - \tilde{M}_{\tau_{s_1}} | \mathcal{M}_{\tau_{s_1}}\big] = 0$$

であり，また

$$\mathbb{E}\big[(Y_{s_2}-Y_{s_1})^2|\mathcal{G}_{s_1}\big]=\mathbb{E}\big[\big(\tilde{M}_{\tau_{s_2}}-\tilde{M}_{\tau_{s_1}}\big)^2|\mathcal{M}_{\tau_{s_1}}\big]=\mathbb{E}\big[\langle\tilde{M}\rangle_{\tau_{s_2}}-\langle\tilde{M}\rangle_{\tau_{s_1}}|\mathcal{M}_{\tau_{s_1}}\big]=s_2-s_1$$

が成り立つ．よって， $Y=\{Y_s,\mathcal{G}_s,0\le s<\infty\}$ は 2 乗可積分な martingale であり，2 次変分過程は $\langle Y\rangle_s=s$ を満たす． よって，定理 5.7 によって，Y は 1 次元 Brown 運動となることが分かった． □

5.4 保存性への応用

この節では，$\mathbb{R}^d$ 上の対称拡散過程の保存性を，Lyons-Zheng 分解を用いて導出した竹田 [T89] の結果を述べることを行う．そのために，(E,ρ) を局所コンパクトな可分距離空間とし，m をその上の至る所正である Radon 測度とし，対応する $L^2(E):=L^2(E;m)$ 上の正則な Dirichlet 形式が

$$\mathcal{E}(u,v)=\frac{1}{2}\int_E\Gamma(u,v)(x)m(dx),\quad u,v\in\mathcal{F}.$$

の形で与えられるような E 上の対称拡散過程を考える．また，距離空間 (E,d) は完備であることを仮定しておく．$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ あるいは対応する Hunt 過程が**保存的**であるとは,

$$T_t1=1,\quad m\text{-a.e.},\ \ \forall\, t>0$$

が成り立つことをいう．あるいは，$\mathbb{P}_x(\zeta=\infty)=1,\ m$-a.e. が成り立つときをいう．すなわち，いかなる時間も確率過程が状態空間内にとどまっていることを保存的という．

関数 u が**局所的に $\mathcal{F}$ に属する** ($u\in\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ と書く) とは，任意の相対コンパクトな開集合 $D\subset E$ に対して，$u_D\in\mathcal{F}$ が存在して G 上 $u=u_D,\ m$-a.e. を満たすことである．関数 $u\in\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ には準連続修正 $\tilde{u}$ が存在することが知られている．

次に，$D\subset E$ を相対コンパクトな開集合に対して，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の D への部分形式を考え，それを $\bar{D}$ 上へ拡張することを考える． そのために，$\mathcal{C}$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の芯とする．このとき，

$$\mathcal{C}_{\bar{D}}:=\Big\{u\in L^2(\bar{D};m):\ \exists\,\tilde{u}\in\mathcal{C}\ \ \text{s.t.}\ \ u(x)=\tilde{u}(x)\ \ \text{for all}\ x\in\bar{D}\Big\}$$

とおく． $\mathcal{C}_{\bar{D}}$ は $L^2(\bar{D};m)$ で稠密であることに注意しておく． 実際，$L^2(\bar{D};m)$ の元は $\bar{D}$ の外では 0 として E 全体に拡張しておくと，$L^2(\bar{D};m)$ は $L^2(E;m)$ の部分空間とみなせて，更には $\mathcal{C}$ は $L^2(E;m)$ において稠密であるからである．

各 $u,v\in\mathcal{C}_{\bar{D}}$ に対して，

$$\mathcal{E}_{\bar{D}}(u,v)=\frac{1}{2}\int_D\Gamma(\tilde{u},\tilde{v})dm$$

と定義する．このとき，次が成り立つ．

補題 5.8 $(\mathcal{E}_{\bar{D}},\mathcal{C}_{\bar{D}})$ は $L^2(\bar{D};m)$ 上の可閉形式である．このとき，閉包を $(\mathcal{E}_{\bar{D}},\mathcal{F}_{\bar{D}})$ と表せば，$(\mathcal{E}_{\bar{D}},\mathcal{F}_{\bar{D}})$ は再帰的な Dirichlet 形式となる．特に，$(\mathcal{E}_{\bar{D}},\mathcal{F}_{\bar{D}})$ の D への部分形式は $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の D への部分形式 $(\mathcal{E}_D,\mathcal{F}_D)$ と一致する：

$$\begin{cases}\mathcal{E}_D(u,v) &=& \mathcal{E}(u,v)\ =\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D\Gamma(u,v)dm, \qquad u,v\in\mathcal{F}_D,\\ \mathcal{F}_D &=& \Big\{u\in\mathcal{F}:\ \tilde{u}=0\ \ \text{q.e.}\ \ \text{on}\ E\setminus D\Big\}\end{cases}$$

Proof: $(\mathcal{E}_D^{\mathrm{ref}},\mathcal{F}_D^{\mathrm{ref}})$ を，Chen([C92, CF11]) の意味の反射形式とする：

$$\begin{cases}\mathcal{F}_D^{\mathrm{ref}} &=& \Big\{u\in L^2(D;m):\ \forall\,n\in\mathbb{N},\ u^{(n)}:=(-n)\vee u\wedge n\in\mathcal{F}_{D,\mathrm{loc}},\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\displaystyle\int_D\Gamma(u^{(n)},u^{(n)})dm<\infty\Big\}\\ \mathcal{E}_D^{\mathrm{ref}}(u,u) &=& \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D\Gamma(u^{(n)},u^{(n)})dm.\end{cases}$$

Chen は，$(\mathcal{E}_D^{\mathrm{ref}}, \mathcal{F}_D^{\mathrm{ref}})$ が $L^2(D;m)$ 上の Dirichlet 形式になることを示した．一方，反射形式の定義から明らかに $\mathcal{C}_{\bar{D}} \subset \mathcal{F}_D^{\mathrm{ref}}$ 及び $u \in \mathcal{C}_{\bar{D}}$ に対して $\mathcal{E}_{\bar{D}}(u,u) = \mathcal{E}_D^{\mathrm{ref}}(u,u)$ が成り立つことが分かる．

次に $\{u_\ell\} \subset \mathcal{C}_{\bar{D}}$ を $(u_\ell, u_\ell)_{L^2(\bar{D})} \to 0$ $(\ell \to \infty)$ を満たす任意の $\mathcal{E}_{\bar{D}}$-Cauchy 列とすると，$\{u_\ell\}$ は上に述べたことから $\mathcal{E}_D^{\mathrm{ref}}$-Cauchy でもある．よって，反射形式は閉であるから，$\mathcal{E}_{\bar{D}}(u_\ell, u_\ell) \to 0$ $(\ell \to \infty)$ が分かる．Markov 性は明らかである．次に，再帰性であるが，$\bar{D} \subset G$ を満たす任意の相対コンパクトな開集合 G を取ると，適当な $v \in \mathcal{C}$ であって，$v = 1 \ \text{ on } \bar{D},\ v = 0 \ \text{ on } E \setminus G$ を満たす $v \in \mathcal{C}$ が存在する．よって，$1_{\bar{D}} = v \ \text{ on } \bar{D}$ であることから $1_{\bar{D}} \in \mathcal{C}_{\bar{D}}$ であることが分かり，さらには強局所性により

$$\mathcal{E}_{\bar{D}}(1_{\bar{D}}, 1_{\bar{D}}) = \frac{1}{2}\int_D \Gamma(v,v)dm = 0$$

が成り立つ．部分形式についても $(\mathcal{E}_D^{\mathrm{ref}}, \mathcal{F}_D^{\mathrm{ref}})$ の D への部分形式が $(\mathcal{E}_D, \mathcal{F}_D)$ と一致することから，$(\mathcal{E}_{\bar{D}}, \mathcal{F}_{\bar{D}})$ のそれも一致することが分かる． □

さて，保存性の条件を述べるために，次の仮定をおく．

Assumption:

適当な $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \cap C(E)$ が存在して，$\varphi(x) > 0,\ x \in E,\ \lim_{x \to \Delta} \varphi(x) = \infty$ を満たし，任意の $r > 0$ に対して，$B_r^\varphi := \{x \in E : \ \varphi(x) < r\}$ は相対コンパクトな開集合である．

このとき，$M_\varphi(r) := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in B_r^\varphi} \Gamma(\varphi,\varphi)(x)$ とおく． $\mathsf{M} = (\Omega, X_t, \mathbb{P}_x)$ を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対応する対称拡散過程とする．

補題 5.9 任意の $r, R > 0$ に対して

$$\mathbb{P}_{m_R^\varphi}\left(\sup_{0 \le t \le T}\big(\varphi(X_t) - \varphi(X_0)\big) \ge r\right) \le 6m(B_r^\varphi)\ell\Big(\frac{2r}{3\sqrt{M_\varphi(R+r)T}}\Big) \tag{5.45}$$

が成り立つ，但し，$m_R^\varphi(dx) = 1_{B_R^\varphi}(x)m(dx),\ \ell(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^\infty e^{-x^2/2}dx$ である．

Proof: $(\mathcal{E}^r, \mathcal{F}^r) = (\mathcal{E}^{\bar{B}_r^\varphi}, \mathcal{F}^{\bar{B}_r^\varphi})$ を補題 5.8 において構成した $D = B_r^\varphi$ に対する反射形式とする．さらに，$\bar{\mathsf{M}}_r = (\Omega^r, X_t, \mathbb{P}_x^r)$ を $(\mathcal{E}^r, \mathcal{F}^r)$ に対応する $\bar{B}_r^\varphi$ 上の拡散過程とする．一方，$(\mathcal{E}^r, \mathcal{F}^r)$ 及び $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の開集合 B_r^φ への部分形式は $(\mathcal{E}_{B_r^\varphi}, \mathcal{F}_{B_r^\varphi})$ と一致することから，M 及び $\bar{\mathsf{M}}_r$ の B_r^φ への部分過程は (除外集合を除いて) 一致する．

このとき，任意の $R, r > 0$ 及び $T > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{m_R^\varphi}\Big(\sup_{0 \le t \le T}\big(\varphi(X_t) - \varphi(X_0)\big) \ge r\Big) &= \mathbb{P}_{m_R^\varphi}^{R+r}\Big(\sup_{0 \le t \le T}\big(\varphi(X_t) - \varphi(X_0)\big) \ge r\Big) \\ &\le \mathbb{P}_{m_{R+r}^\varphi}^{R+r}\Big(\sup_{0 \le t \le T}\big(\varphi(X_t) - \varphi(X_0)\big) \ge r\Big)\end{aligned} \tag{5.46}$$

が成立する．ここで，最初の等号は，M と $\bar{\mathsf{M}}^{R+r}$ の開集合 B_{R+r}^φ における部分過程が共通であることを用いた．後半の不等号は明らかである．

ここで，再び補題 5.8 より，$\bar{\mathsf{M}}^{R+r}$ は保存的であることから，$\varphi \in \mathcal{F}_{\bar{B}_{R+r}^\varphi}$ に注意して Lyon-Zheng decomposition (I) (5.40) を用いると

$$\varphi(X_t) - \varphi(X_0) = \frac{1}{2}M_t^{[\varphi]} + \frac{1}{2}\big(M_{T-t}^{[\varphi]}(r_T) - M_T^{[\varphi]}(r_T)\big), \quad \mathbb{P}_{m_{R+r}^\varphi}^{R+r}\text{-a.s.}$$

が成り立つ．すると (5.46) の右辺は補題 5.6 より次のように上から評価される：

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{m_{R+r}^\varphi}^{R+r}\Big(\sup_{0 \le t \le T} M_t^{[\varphi]} \ge \frac{2}{3}r\Big) + \mathbb{P}_{m_{R+r}^\varphi}^{R+r}\Big(\sup_{0 \le t \le T} M_t^{[\varphi]}(r_T) \ge \frac{2}{3}r\Big) + \mathbb{P}_{m_{R+r}^\varphi}^{R+r}\Big(-M_T^{[\varphi]}(r_T) \ge \frac{2}{3}r\Big) \\ &\le 2\mathbb{P}_{m_{R+r}^\varphi}^{R+r}\Big(\sup_{0 \le t \le T} M_t^{[\varphi]} \ge \frac{2}{3}r\Big) + \mathbb{P}_{m_{R+r}^\varphi}^{R+r}\Big(\sup_{0 \le t \le T} -M_t^{[\varphi]} \ge \frac{2}{3}r\Big)\end{aligned} \tag{5.47}$$

すると，定理 5.8 により適当な (完備化された) 確率空間 $(\tilde{\Omega}^{R+r}, \tilde{\mathcal{M}}_t^{R+r}, \tilde{\mathbb{P}}_x^{R+r})$ 上の 1 次元 Brown 運動 $B = B(t)$ が存在して，$M_t^{[\varphi]} = B\Big(\displaystyle\int_0^t \Gamma(\varphi,\varphi)(X_u)du\Big)$ と表現できる．従って，(5.47) の最終項は次で評価される：

$$3\int_{B^{\varphi}_{R+r}} \tilde{\mathbb{P}}_x^{R+r}\Big(\sup_{0\le t\le M_\varphi(R+r)T} B(t) \ge \frac{2}{3}r\Big)dm^{\varphi}_{R+r} = 6m(B^{\varphi}_{R+r})\ell\Big(\frac{2r}{3\sqrt{M_\varphi(R+r)T}}\Big).$$

□

注意 5.1 Gauss の誤差関数 $\ell(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^\infty e^{-x^2/2}dx$ は $\ell(a) \le \frac{e^{-a^2/2}}{a}$，$a > 0$ という評価が成立する．実際，$a > 0$ に対して，

$$\ell(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-(x+a)^2/2}dx = \frac{e^{-a^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \underbrace{e^{-x^2/2}}_{\le 1}\cdot e^{-ax}dx \le e^{-a^2/2}\int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{e^{-a^2/2}}{a}.$$

さて，上の補題を用いて，本節の主題である保存性が成り立つ十分条件を述べる：

定理 5.9 ([T89, Theorem 2.2], [FOT11, Theorem 5.7.3])

Assumption を満たす適当な関数 $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \cap C(E)$ が存在するとする．このとき，適当な $T > 0$ が存在して，任意の $R > 0$ に対して，

$$\lim_{r\to\infty} m(B^{\varphi}_{R+r})\ell\Big(\frac{2r}{3\sqrt{M_\varphi(R+r)T}}\Big) = 0 \tag{5.48}$$

が成り立つならば，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する対称拡散過程は保存的である．

Proof: $\mathsf{M} = (X_t, \mathbb{P}_x)$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する対称拡散過程とする．上の補題と定理の条件により，$T' = 4T/9$ とおくと，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{m^{\varphi}_R}\Big(\sup_{0\le t\le T'}\big(\varphi(X_t)-\varphi(X_0)\big) = \infty\Big) &= \lim_{r\to\infty}\mathbb{P}_{m^{\varphi}_R}\Big(\sup_{0\le t\le T'}\big(\varphi(X_t)-\varphi(X_0)\big) \ge r\Big)\\ &\le \lim_{r\to\infty} 6m(B^{\varphi}_{R+r})\ell\Big(\frac{r}{\sqrt{M_\varphi(R+r)T}}\Big) = 0\end{aligned}$$

が成り立つことから，

$$p_{T'}1(x) = \mathbb{P}_x\big(T' < \zeta\big) = \mathbb{P}_x\Big(\sup_{0\le t\le T'}\big(\varphi(X_t)-\varphi(X_0)\big) < \infty\Big) = 1, \quad m\text{-a.e.}$$

となる．ここで ζ は M の life time である．半群性を使うと，すべての $t > 0$ に対して $p_t1 = 1$ が成り立つことが分かる．

□

例題 2.1 において考えた例を考える：

例題 5.2 $A(x) = (a_{ij}(x))$ を $\mathbb{R}^d$ 上の d 次対称行列値関数で，各成分関数 $a_{ij}(x)$ は局所可積分な Borel 可測函数とし，以下の条件を満たすものとする：

(i) (対称性) $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $\quad x \in \mathbb{R}^d,\ i,j = 1,2,\dots,d.$

(ii) (一様楕円性) 適当な $\delta > 0$ が存在して，

$$\delta|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d,\ \xi = (\xi_i, \xi_2, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d. \tag{5.49}$$

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}dx,$$

で定義される $L^2(\mathbb{R}^d; dx)$ 上の対称二次形式 $(\mathcal{E}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ は例題 2.1 で示したように可閉形式となる．$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ をその閉包とする．このとき，適当な正数 $k > 0$ に対して，

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le k(2+|x|)^2 \log(2+|x|)|\xi|^2, \quad \forall\, x,\ \xi = (\xi_i, \xi_2, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d. \tag{5.50}$$

が成立するならば，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ あるいは対応する対称拡散過程は保存的である．実際，$\varphi(x) = \log(2+|x|)$, $x \in \mathbb{R}^d$ とおくと，φ は **Assumption** を満たし，$M_t^{[\varphi]}$ の 2 次変分過程

$$\langle M^{[\varphi]}\rangle_t = \int_0^t \Gamma(\varphi,\varphi)(X_u)du = \sum_{i,j=1}^d \int_0^t a_{ij}(X_u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(X_u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(X_u)du$$

は仮定 (5.49) から $t \to \infty$ のとき発散することが分かる．さらに，定理の条件を確認すると，$m(dx) = dx$ は Lebesgue 測度であり，

$$\begin{aligned} M_\varphi(r) = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in B_r^\varphi} \Gamma(\varphi,\varphi)(x) \ &= \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \{\log(2+|x|) \le r\}} \frac{1}{(2+|x|)^2|x|^2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)x_ix_j \\ &\le \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \{\log(2+|x|) \le r\}} k\log(2+|x|) \ \le kr. \end{aligned}$$

が成り立つことから，注意 5.1 によって $T < 1/2kd$ ならば，

$$\begin{aligned} m(B_{R+r}^\varphi)\ell\Big(\frac{r}{\sqrt{M_\varphi(R+r)T}}\Big) &= m\big(\{x \in \mathbb{R}^d : \log(2+|x|) \le R+r\}\big)\ell\Big(\frac{r}{\sqrt{k(R+r)T}}\Big) \\ &\le c_d e^{d(R+r)}\frac{\sqrt{kT(R+r)}}{r}e^{-\frac{r^2}{2kT(R+r)}} \ \to 0, \quad \text{as } r \to \infty \end{aligned}$$

となる．

一方，Davies [D85] によって，$a_{ij}(x) = (1+|x|)^2\big(\log(1+|x|)\big)^\beta\delta_{ij}$, $\beta > 1$ のとき，対応する拡散過程は保存的でないことが知られている． $\square$

Bibliography

[BD59] A. Beurling and J. Deny, Dirichlet spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **45** (1959), 208–215

[BG68] R.M. Blumenthal and R.K. Getoor, *Markov Processes and Potential Theory*, Dover, 2007 (originally published from Academic Press, 1968)

[C92] Z.Q. Chen, On reflected Dirichlet spaces, *Probab. Th. Relat. Fields*, **94** (1992), 135-162

[CF11] Z.Q. Chen and M. Fukushima, *Symmetric Markov Processes, Time Change, and Boundary Theory*, Princeton University Press, 2011

[D85] E.B. Davies, L^1 properties of second order elliptic operators, *Bull. London Math. Soc.*, **17** (1985), 417-436

[F71] M. Fukushima, Dirichlet spaces and strong Markov processes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **162** (1971), 185-224

[FOT11] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, 2nd rev. and ext. ed., De Gruyter, 2011

[FT08] 福島 正俊, 竹田 雅好, マルコフ過程, 培風館, 2008

[LZ88] T.J. Lyons and W.A. Zheng, A crossing estimate for the canonical process on a Dirichlet space and a tightness result, *Astérisque*, **157-8** (1988), 249-271

[T89] M. Takeda, On a martingale method for symmetric diffusion processes and its applications, *Osaka J. Math.*, **26** (1989), 605-623

[TK20] 竹田 雅好, 桑江 一洋, ディリクレ形式入門, 朝倉書店, 2020