「理工系のための 微分積分の基礎」(上村稔大著 培風館) 正誤表 及び 各章の問の略解

Update: 2019 年 9 月 10 日

問及び章末問題の略解作成に協力頂いた，岡村悠奈さん (2019 年 3 月関西大学大学院理工学研究科博士前期課程修了)，稲垣雄樹君 (関西大学大学院理工学研究科博士前期課程) に，また，本文の間違い・問題点をご指摘いただいた竹田雅好氏，大倉弘之氏に感謝いたします．

****

Part 1.　正誤表

- p.10 ℓ.1: 『 $\cdots$ 以下の性質成り立つ： 』 $\Longrightarrow$ 『 $\cdots$ 以下の性質が成り立つ： 』
- p.21 問題 **1.5** (8): 『 $\dfrac{1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 8+\cdots+(2n-1)\cdot(2n)}{n^3}$ 』

  $\Longrightarrow$ 『 $\dfrac{1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+\cdots+(2n-1)\cdot(2n)}{n^3}$ 』
- p.72 問 **3.12** (2): 問題間違い $\Longrightarrow$ 問題削除

  $x\to 0$ では極限は存在しない．$x\to 0+$ ならば $+\infty$ に発散する．$x\to 0-$ ならば 0 に収束する．
- p.84 問 **4.4** (1): 『 $\alpha\neq 0$ 』 $\Longrightarrow$ 『 $\alpha\neq -1$ 』
- p.85 ℓ.4: 『 $\cdots=\log(x^2+x)+C.$』 $\Longrightarrow$ 『 $\cdots=\log|x^2+x|+C.$』
- p.87 ℓ.6: 『 $\cdots=-\dfrac{1}{2(n-1)}\cdot\dfrac{1}{(x^2+1)^{n-1}}+C$ 』

  $\Longrightarrow$ 『 $\cdots=-\dfrac{1}{2(n-1)}\cdot\dfrac{1}{(x^2+a)^{n-1}}+C$ 』
- p.126 問題 **4.1** (32): 『 $e^x\sin(3x)dx$ 』 $\Longrightarrow$ 『 $\displaystyle\int e^x\sin(3x)dx$ 』
- p.184 問 **6.8** (1) 問題間違い $\Longrightarrow$ 問題削除，または，次の問に差し替え：$\displaystyle\iint_D\frac{xy}{(x^2+y^2)^3}dxdy,$ $D=\{(x,y):0\leqq x,\ 0\leqq y,\ 1\leqq x^2+y^2\}$

  もとの問題では広義積分は存在しない（発散する）．
- p.219 問題 **1.4** (1): 『 $\left\{\dfrac{1}{2n+1}\right\}$ 』 $\Longrightarrow$ 『 $\left\{\dfrac{1}{2n-1}\right\}$ 』
- p.219 問題 **1.6**: 解答に $\underline{\theta=0,\ \pi}$ が抜けている． 略解において，

  $$-1<-4t^2+2t+1\leqq 1\quad\Longleftrightarrow\quad -2<-4t^2+2t\leqq 0$$

  であったが，これを書き換えると「$2t^2-t-1<0$」かつ「$2t^2-t\geqq 0$」．したがって，「$-\dfrac{1}{2}<t<1$」かつ「$t\leqq 0$ または $t\geqq\dfrac{1}{2}$」を得る．$0\leqq t\leqq 1$ に注意して解くと，「$t=0$」または「$\dfrac{1}{2}\leqq t<1$」となる．よって，$\theta=0,\pi,\ \dfrac{1}{6}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi,\ \theta\neq\dfrac{1}{2}\pi.$

- p.223 問題 **2.4** (2): 略解は間違い． 正しくは <u>$-\infty$ に発散する</u>．実際，$t=-x$ とおくと，「$x\to-\infty \iff t\to\infty$」だから，与えられた関数の極限は，

$$-3t+1-\sqrt{9t^2-4t+1}=-3t+1-\sqrt{9\Big(t-\frac{2}{9}\Big)^2+\frac{5}{9}}\leq -3t+1\to-\infty\ (t\to\infty)$$

- p.228 問題 **4.1** 不定積分において，$\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+C$ であるから，教科書の略解においては省略しているが，対数関数が現れるときは適宜絶対値をつける必要がある：

(8) 『$2\log x$』 $\Longrightarrow$ 『$2\log|x|$』

(10) 『$x-2\log(x+2)$』 $\Longrightarrow$ 『$x-2\log|x+2|$』

(11) 『$\frac{1}{3}\log(3x+2)$』 $\Longrightarrow$ 『$\frac{1}{3}\log|3x+2|$』

(12) 『$\frac{1}{2}x^2-7\log x$』 $\Longrightarrow$ 『$\frac{1}{2}x^2-7\log|x|$』

(17) 『$-\frac{1}{2}\log(\cos(2x))$』 $\Longrightarrow$ 『$-\frac{1}{2}\log|\cos(2x)|$』

(20) 『$\frac{1}{3}\log(3x-\cos(3x))$』 $\Longrightarrow$ 『$\frac{1}{3}\log|3x-\cos(3x)|$』

(21) 『$\frac{1}{4}\log\frac{2+x}{2-x}$』 $\Longrightarrow$ 『$\frac{1}{4}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right|$』

(25) 『$\log x-\log(\sqrt{x^2+1}+1)$』 $\Longrightarrow$ 『$\log|x|-\log(\sqrt{x^2+1}+1)$』

(26) 『$\frac{1}{3}\big(\log x-\log(\sqrt{9-x^2}+3)$』 $\Longrightarrow$ 『$\frac{1}{3}\big(\log|x|-\log(\sqrt{9-x^2}+3)$』

- p.229 問題 **4.4** 3 次近似式を求める問題であるから，

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}+\frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

を書き表す必要がある．次数が合わない略解があるので，適宜切り取る：

(2) 『$x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}$』 $\Longrightarrow$ 『$x+\frac{x^3}{6}$』 (3) 『$\frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{6}-\frac{3x^5}{40}$』 $\Longrightarrow$ 『$\frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{6}$』

(4) 『$1-x^2+x^4-x^6$』 $\Longrightarrow$ 『$1-x^2$』 (5) 『$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$』 $\Longrightarrow$ 『$x-\frac{x^3}{3}$』

(7) 『$x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$』 $\Longrightarrow$ 『$x+\frac{x^3}{6}$』 (8) 『$1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}$』 $\Longrightarrow$ 『$1+\frac{x^2}{2}$』

(9) 『$x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}$』 $\Longrightarrow$ 『$x-\frac{x^3}{3}$』

- p.229 問題 **4.5** (1): 『$\displaystyle\log(2+x)=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k}x^k-\frac{(-1)^n}{n}\Big(\frac{x}{2+\theta x}\Big)^n$』

$$\Longrightarrow \quad 『\log(2+x)=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k\cdot 2^k}x^k-\frac{(-1)^n}{n}\Big(\frac{x}{2+\theta x}\Big)^n』$$

(2): 略解の最後の式で，『$\displaystyle=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^k}{(2k-1)!}x^{2k-1}+\frac{\sin(\theta x+\frac{2m+1}{2}\pi)}{(2m+1)!}x^{2m+1}$』

$$\Longrightarrow \quad 『=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}+\frac{\sin(\theta x+\frac{2m+1}{2}\pi)}{(2m+1)!}x^{2m+1}』$$

Part 2. 問の略解

第 1 章　集合・数列

- 問 **1.1:** (1) $\{3n-1 : n\in\mathbb{N}\}$　(2) $\{-2n+1 : n\in\mathbb{N}\}$　(3) $\{-2n : n\in\mathbb{N}\}$
- 問 **1.2:** (1) $\{6\}$　(2) $\{2,4,5,8\}$　(3) $\{1,3,6,7,9\}$　(4) $\{1,2,3,4,5,7,8,9\}$
- 問 **1.3:** 背理法による．$x+y$ を無理数でない，すなわち，有理数と仮定すると，ある自然数 m と整数 n を用いて，$x+y=n/m$ と書くことができる．また，x は 有理数であることから，ある自然数 k と 整数 l を用いて $x=l/k$ と書くことができる．すると，

$$y=\frac{n}{m}-x=\frac{n}{m}-\frac{l}{k}=\frac{nk-lm}{km}$$

となり，y が無理数であることに反する．　□

- 問 **1.4:** 「$\exists\,\alpha>0:\ \forall n\in\mathbb{N},\ P(\alpha,n)$ でない」
- 問 **1.5:** (1)「$\forall n\in\mathbb{N}\,(\mathrm{Even}(n^2)),\ \mathrm{Even}(n)$ 」　ここで，$\mathrm{Even}(n)$ は n が偶数であることを表す．
(2) 「$\forall p\in\mathbb{N}\,(\mathrm{Prime}(p),\exists n\in\mathbb{N}:\ p\leqq n$ または $p>2n$ 」
- 問 **1.6:** 実数の性質 (6)(i) より，

$$|x|=|(x-y)+y|\leqq|x-y|+|y|$$

が成り立つ．よって，$|x|-|y|\leqq|x-y|$. 次に，x と y の役割を入れ替え，$|-a|=|a|$ に注意すると，

$$|y|=|(y-x)+x|\leqq|y-x|+|x|=|x-y|+|x|$$

が得られる．よって，$|y|-|x|\leqq|x-y|$. したがって，$\big||x|-|y|\big|\leqq|x-y|$.　□

- 問 **1.7:** (1) 上限：1, 下限：-1　(2) 上限：1, 下限：0　(3) 上限：1, 下限：$\dfrac{1}{2}$
- 問 **1.8:** (1) -1　(2) 2　(3) $\dfrac{1}{2}$
- 問 **1.9:** (1) $0<r<1$ より，$1/r>1$. よって，$1/r=1+h$ とおくと，$h>0$. 二項定理により，$n\geqq 3$ のとき，

$$r^{-n}=(1/r)^n=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_k h^k+\cdots+h^n>\frac{n(n-1)}{2}h^2.$$

したがって，$n\geqq 3$ に対して，$0<nr^n<\dfrac{2}{(n-1)h^2}$. また，$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{2}{(n-1)h^2}\to 0$ となるから，はさみうちの定理により，$nr^n\to 0\ (n\to\infty)$ が成り立つ．　□

(2) $0<a<1$ のときのみを示す．$b=1/a$ とおくと，$b>1$ だから，このときは，例題 1.4(2) の証明で，2 を b に置き換えることにより，$n\to\infty$ のとき $\dfrac{1}{a^{1/n}}=b^{1/n}\to 1$ が成り立つことが分かる．よって，$a^{1/n}=\dfrac{1}{b^{1/n}}\to\dfrac{1}{1}=1\ (n\to\infty)$.　□

- 問 **1.10:** ガウス記号の定義 $[x]\leqq x<[x]+1$ により，$x-1<[x]\leqq x$ を得る．よって，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，$2^n\pi-1<[2^n\pi]\leqq 2^n\pi$ が成り立つことから，

$$\pi-\frac{1}{2^n}<\frac{[2^n\pi]}{2^n}\leqq\pi$$

となる．$n \to \infty$ とすると，最左辺は π に収束するから，はさみうちの定理により，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[2^n\pi]}{2^n} = \pi.$$

$\square$

– **問 1.11:** (1) $n \geqq 4$ のとき，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{n/3^n}{(n-1)/3^{n-1}} = \dfrac{n}{3(n-1)} = \dfrac{1}{3}\Big(1+\dfrac{1}{n-1}\Big) \leq \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4}{3} = \dfrac{4}{9}$

(2) (1) の結果と帰納法を用いることにより示される．

(3) $n \geqq 4$ に対して，$0 \leq a_n < (4/9)^{n-3}a_3$ より，$(4/9)^{n-3}a_3 \to 0$ $(n\to\infty)$．よって，はさみうち定理により $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ がわかる．

– **問 1.12:** $\Big(1-\dfrac{1}{n^2}\Big)^n = \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)^n \to e\cdot\dfrac{1}{e} = 1$ $(n\to\infty)$

第 2 章　連続関数

– **問 2.1:** (1) 3　(2) $\dfrac{3}{2}$　(3) 0

– **問 2.2:** (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1-x^2)-(1+x^2)}{x^2\big(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}\big)} = \lim_{x\to0}\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}} = -1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x}\big(x-(x+1)\big)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\sqrt{2}}{1+\sqrt{1+1/x}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{(x^2+x)-x^2}$

$\displaystyle = \lim_{x\to\infty}\Big(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\Big) = 2$　(4) $y=-x$ とおくと，「$x\to-\infty \Leftrightarrow y\to\infty$」．よって，

$\displaystyle(\text{与式}) = \lim_{y\to\infty}\frac{\sqrt{y^2-1}+2}{-y} = -\lim_{y\to\infty}\Big(\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}+\frac{2}{y}\Big) = -1$

– **問 2.3:** (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{4}{3}\cdot\frac{\sin 4x}{4x} = \frac{4}{3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{4}{3}\cdot\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x} = \frac{4}{3}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1$

(4) $\theta = x+\frac{\pi}{2}$ とおくと,「$x\to-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta\to0$」. よって, $\displaystyle(\text{与式}) = \lim_{\theta\to0}\frac{\cos\big(\theta-\frac{\pi}{2}\big)}{\theta} = \lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

– **問 2.4:** (1) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1},\ x\in\mathbb{R}$　(2) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x},\ x\in(0,\infty)$

– **問 2.5:** (1) $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = (2x+1)^2,\ x\in\mathbb{R}$

(2) $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \dfrac{4}{x+1}+3,\ x\in\mathbb{R}$

(3) $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \dfrac{1}{x+1},\ x\geqq 0$

– **問 2.6:** (1) $\dfrac{9}{4}$　(2) $\dfrac{4}{3}$　(3) $5ab^2\sqrt{2a}$　(4) x^{15}　(5) $2x^4y^6\sqrt{7xy}$

– **問 2.7:** (1) $5 = \log_2 32$　(2) $3 = \log_{10}1000$　(3) $\dfrac{1}{27} = \Big(\dfrac{1}{3}\Big)^3$　(4) $\dfrac{1}{25} = 5^{-2}$

– **問 2.8:** (1) $\log_4(30x^2)$　(2) $\log_2\Big(\dfrac{x}{4y}\Big)$　(3) $\log_{10}(y^2)$

– **問 2.9:** (1) $\log_3 x+\log_3 y$　(2) $2\log_{10}2-\log_{10}3$　(3) $\log_2 3+\log_2 y-\log_2 x$

(4) $\log_8 x - \dfrac{1}{2}\log_8 y$

– **問 2.10:** $R = 2e^{r/2}-2$

– **問 2.11:** (1) $\dfrac{\pi}{6}$　(2) 0　(3) $\dfrac{\pi}{4}$

第 3 章　微 分

– 問 **3.1:** $y = -4x - 2$

– 問 **3.2:** $f'(2) = 2$

– 問 **3.3:** -48

– 問 **3.4:** (1) $f'(x) = 2x - 2$　(2) $f'(x) = -4x + 3$　(3) $f'(x) = 6x + 2$

– 問 **3.5:** $(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \Big(\cos x \cdot \dfrac{\cos h - 1}{h} - \dfrac{\sin h}{h} \cdot \sin x \Big) = -\sin x$

$(\tan x)' = \Big(\dfrac{\sin x}{\cos x}\Big)' = \dfrac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

– 問 **3.6:** (1) $y = \cos x,\ x \in [0,\pi]$ とおくと，$y' = -\sin x \neq 0,\ x \in (0,\pi)$ だから，「$-1 < y < 1 \ \Leftrightarrow\ 0 < x < \pi$」．逆関数の微分の公式により，$\big(\mathrm{Cos}^{-1} y\big)' = \dfrac{1}{(\cos x)'} = -\dfrac{1}{\sin x}\ \ (y = \cos x)$. 一方，$0 < x < \pi$ のとき，$\sin x > 0$ に注意すると $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-y^2}$. よって，$\mathrm{Cos}^{-1} y = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}\ (-1 < y < 1)$ となり，(1) が示された．　□

(2) $y = \tan x,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ とおくと，$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \neq 0,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ だから，「$-\infty < y < \infty \ \Leftrightarrow\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$」．逆関数の微分の公式により，$\big(\mathrm{Tan}^{-1} y\big)' = \dfrac{1}{(\tan x)'} = \cos^2 x\ \ (y = \tan x)$. よって，$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ に注意すると，(2) が得られる．　□

– 問 **3.7:** (1) $f'(x) = 2x - \dfrac{4}{x^3}$　(2) $f'(x) = -\dfrac{x\sin x + 2\cos x + 2}{(x+\sin x)^2}$　(3) $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

– 問 **3.8:** (1) $f'(x) = 5x^4 - 12x^2 + 2x$ より，$f''(x) = 20x^3 - 24x + 2$

(2) $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ より，$f''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$

– 問 **3.9:** (1) $\big(\cos x\big)^{(n)} = \cos\Big(x + \dfrac{n\pi}{2}\Big)$　(2) $f'''(x) = 2e^{-x}\big(\cos x + \sin x\big)$

(3) $f'''(x) = 2e^{-x}\big(\cos x - \sin x\big)$

– 問 **3.10:** $f(x) = e^{-x} - (1-x),\ x \geqq 0$ とおく． 任意の $x > 0$ に対して，$f(x)$ は $[0,x]$ で連続であり，$(0,x)$ で微分可能であるから，ラグランジュの平均値の定理により，

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c), \quad 0 < c < x$$

を満たす c がある．また， $f(0) = 0,\ f'(c) = -e^{-c} + 1 > 0,\ c \in (0,x)$ だから，上の等式で分母を払うと，

$$f(x) = f(x) - f(0) = (x-0)f'(c) = xf'(c) > 0$$

となり，題意の不等式が示される．　□

– 問 **3.11:** (1) $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^{5t} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{5e^{5t}}{1} = 5$　(2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} (1-\cos x)\cos^2 x = 0$

(3) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{ax^{a-1}}{bx^{b-1}} = \dfrac{a}{b}$

– 問 **3.12:** (1) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{1}{x\tan x}\Big(\tan x - x\Big) = \dfrac{\tan x - x}{x^2} \cdot \dfrac{x}{\sin x} \cdot \cos x$ である．また，例題 **3.12** における評価を用いると，

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{2x\cos^2 x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} \cdot \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = 0$$

だから，$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)=0.$　　(2) は削除

(3) $\left(\cos x\right)^{1/x^2}=e^{(1/x^2)\log(\cos x)}$ である．また，$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cos x}=-\frac{1}{2}$ に注意すると，$\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{1/x^2}=e^{\lim_{x\to 0}(1/x^2)\log(\cos x)}=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$

(4) $\left(\tan(2x)\right)^x=e^{x\tan(2x)}$ である．また，$\lim_{x\to 0}x\tan(2x)=0$ に注意すると，$\lim_{x\to 0}\left(\tan(2x)\right)^x=e^{\lim_{x\to 0}x\tan(2x)}=e^0=1.$

– **問 3.13:** (1) $x=\frac{1}{2}$ のとき極大値 $\frac{1}{2e}$ をとる．　(2) $x=\frac{3}{7}$ のとき極大値 $\frac{3^3\cdot 4^4}{7^7}$, $x=1$ のとき極小値 0 をとる．　(3) $x=-2$ のとき極大値 2, $x=-3, 0$ のとき極小値 0 をとる．

第 4 章　積 分

(積分定数は省略する)

– **問 4.1:** (1) $\frac{x^4}{4}$　(2) $\frac{2}{3}x^{3/2}$　(3) $-\frac{1}{x}$

– **問 4.2:** (1) $-e^{-x}$　(2) $\frac{2^x}{\log 2}$

– **問 4.3:** (1) $-\frac{1}{9x-6}$　(2) $-\frac{1}{2(2x^2+1)^2}$　(3) $\frac{1}{3}(x^2+3)^{3/2}$

– **問 4.4:** (1) $-\frac{\cos^{\alpha+1}x}{\alpha+1}$ ($\alpha\neq 0$ ではなく，$\alpha\neq -1$ である)　(2) $\frac{(\log x)^2}{2}$　(3) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$

– **問 4.5:** (1) (与式) $=\int x^2\left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)'dx=\frac{1}{2}x^2e^{x^2}-\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)$

(2) (与式) $=\int x(-\cos x)'dx=-x\cos x+\int\cos x dx=\sin x-x\cos x$

(3) (与式) $=\int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2$

(4) (与式) $=\int x'\tan^{-1}x dx=x\tan^{-1}x-\int\frac{x}{x^2+1}dx=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)$

– **問 4.6:** (1) $t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと，$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ だから，

$$(\text{与式})=\int\frac{1}{1+2t/(1+t^2)}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2dt}{(1+t)^2}=-\frac{2}{1+t}=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}$$

(2) (1) と同様に $t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと，$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ だから，

$$(\text{与式})=\int\frac{1}{2+(1-t^2)/(1+t^2)}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2dt}{3+t^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

(3) $t=\tan x$ とおくと，$dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$ だから，$dx=\frac{dt}{1+t^2}$. よって，$\int\frac{dx}{2+\tan x}=\int\frac{1}{2+t}\cdot\frac{dt}{1+t^2}$. 一方，被積分関数は，$\frac{1}{(2+t)(1+t^2)}=-\frac{1}{5}\left(\frac{t}{t^2+1}-\frac{2}{t^2+1}-\frac{1}{t+2}\right)$ と部分分数に分解できるから，

$$\int\frac{dt}{(2+t)(1+t^2)}=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\log(t^2+1)-2\tan^{-1}t-\log|t+2|\right)=\frac{2x}{5}+\frac{1}{5}\log|\sin x+2\cos x|$$

– **問 4.7:** (1) $t-x=\sqrt{x^2+1}$ とおくと，$x=\dfrac{t^2-1}{2t}$ だから，$dx=\dfrac{t^2+1}{2t^2}dt$．また，$\sqrt{x^2+1}=t-x=t-\dfrac{t^2-1}{2t}=\dfrac{t^2+1}{2t}$ に注意すると，$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt=\int\frac{dt}{t}=\log|t|=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ $\left(=\sinh^{-1}x\ ^{*1}\right)$

(2) $t-x=\sqrt{x^2+9}$ とおくと，$x=\dfrac{t^2-9}{2t}$ だから，$dx=\dfrac{t^2+9}{2t^2}dt$．また，$\sqrt{x^2+9}=t-x=t-\dfrac{t^2-9}{2t}=\dfrac{t^2+9}{2t}$ に注意すると，

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+9}\,dx&=\int\frac{t^2+9}{2t}\cdot\frac{t^2+9}{2t^2}dt\ =\int\Big(\frac{t}{4}+\frac{9}{2t}+\frac{81}{4t^3}\Big)dt\\&=\frac{t^2}{8}+\frac{9}{2}\log|t|-\frac{81}{8}t^{-2}\ =\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+9}+\frac{9}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)\\&\left(=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+9}+\frac{9}{2}\log 3+\frac{9}{2}\sinh^{-1}\Big(\frac{x}{3}\Big)\ ^{*1}\right)\end{aligned}$$

(3) 問題の修正 $\displaystyle\int\frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\boldsymbol{4-x^2}}}\ \Rightarrow\ \int\frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\boldsymbol{4x-x^2}}}$ と変更する

(変更した問の略解) $4x-x^2=0$ を解くと $x=0,4$ だから，$t=\sqrt{\dfrac{4-x}{x}}$ とおくと，$x=\dfrac{4}{t^2+1}$ より，$dx=\dfrac{-8t}{(1+t^2)^2}dt$．また，$\sqrt{4x-x^2}=\dfrac{4t}{1+t^2}$ に注意すると，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}=\int\frac{1+t^2}{4t}\cdot\frac{-8t}{(1+t^2)^2}dt=-2\int\frac{dt}{1+t^2}=-2\mathrm{tan}^{-1}t=-2\tan^{-1}\sqrt{\frac{4-x}{x}}.$$

(なお，教科書通りの問とすると，$t=\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$ $(-2<x<2)$ とおいて，上記の修正した問の解答と同様に計算すると，

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}&=\int\frac{1}{\sqrt{4-4(1-t^2)^2/(1+t^2)^2}}\cdot\Big(-\frac{8t}{(1+t^2)^2}\Big)dt\\&=-\int\frac{2}{1+t^2}dt=-2\mathrm{tan}^{-1}t\ =-2\mathrm{tan}^{-1}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\end{aligned}$$

となる．ここで，逆正接関数を主枝 $(-\pi/2,\pi/2)$ で考えることにして，$\alpha(x)=\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$ とおくと，$-2<x<2$ だから，『 $\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}=\tan\alpha(x)$ $(0<\alpha(x)<\pi/2)$ $\Leftrightarrow$ $x(1+\tan^2\alpha(x))=2(1-\tan^2\alpha(x))$ $\Leftrightarrow$ $x=2\cos 2\alpha(x)$ 』．よって，『 $\cos 2\alpha(x)=\dfrac{x}{2}$ $(0<\alpha(x)<\pi/2)$ $\Leftrightarrow$ $2\alpha(x)=\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{x}{2}$ 』．これにより，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=-2\mathrm{tan}^{-1}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}=-\cos^{-1}\frac{x}{2}$$

でもある．さらに，別解として $t=\sin^{-1}\frac{x}{2}$ $(\Leftrightarrow\ x=2\sin t)$ とおくことにより，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{2\cos t}{2\cos t}dt=t=\sin^{-1}\frac{x}{2}$$

も解となる．)

– **問 4.8:** (1) $\dfrac{31}{5}$ (2) $\dfrac{45}{4}$ (3) $\dfrac{1}{2}(e^2-1)$ (4) $\dfrac{1}{3}$

[*1] p.46 **問題 2.14**(1) を見よ

– 問 **4.9:** (1) $s=\dfrac{2t}{3}$ ($\Leftrightarrow$ $t=3s/2$) とおくと，$\displaystyle\int_0^{3/2}\frac{dt}{9+4t^2}=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{ds}{1+s^2}=\frac{1}{6}\big[\mathrm{Tan}^{-1}\,s\big]_0^1=\frac{\pi}{24}$
(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\cos^2 t\sin t\,dt=\Big[-\frac{1}{3}\cos^3 t\Big]_0^{\pi/3}=\frac{7}{24}$ (3) $s=\sin^{-1}(t/2)$ ($\Leftrightarrow$ $t=2\sin s$) とおくと，$\displaystyle\int_0^2\sqrt{4-t^2}dt=4\int_0^{\pi/2}\cos^2 s ds=2\int_0^{\pi/2}\big(\cos(2s)+1\big)ds=\big[\sin(2s)+2s\big]_0^{\pi/2}=\pi$

– 問 **4.10:** (1) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to1-}\int_0^\varepsilon\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to1-}\big[\mathrm{Sin}^{-1}x\big]_0^\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to1-}\big(\mathrm{Sin}^{-1}\varepsilon-\mathrm{Sin}^{-1}0\big)=\frac{\pi}{2}$ (2) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\lim_{\substack{\varepsilon\to1-\\ \delta\to0+}}\int_\delta^\varepsilon\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$. ここで, $x-x^2=\dfrac{1}{4}-(x-\dfrac{1}{2})^2$ より, $t=2x-1$ ($\Leftrightarrow$ $x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$) と変換すると，$\displaystyle\int_\delta^\varepsilon\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int_{2\delta-1}^{2\varepsilon-1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\big[\mathrm{Sin}^{-1}\,t\big]_{2\delta-1}^{2\varepsilon-1}=\mathrm{Sin}^{-1}(2\varepsilon-1)-\mathrm{Sin}^{-1}(2\delta-1)$ となることから，$\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to1-\\ \delta\to0+}}\int_\delta^\varepsilon\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\lim_{\substack{\varepsilon\to1-\\ \delta\to0+}}\big(\mathrm{Sin}^{-1}(2\varepsilon-1)-\mathrm{Sin}^{-1}(2\delta-1)\big)=\mathrm{Sin}^{-1}1-\mathrm{Sin}^{-1}(-1)=\pi$

– 問 **4.11:** (1) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,1]$ とおくと，特異点 $x=0$ における広義積分である．また，任意の $\theta\in\mathbb{R}$ に対して，$|\sin\theta|\le1$ だから，例えば，$\lambda=1/2$ をとると，$(x-0)^{1/2}\big|\sin\dfrac{1}{x}\big|\le\sqrt{x}\le1, x\in(0,1]$ がなりたつ．よって，**例題 4.14** (1) により，広義積分 $\displaystyle\int_0^1\sin\frac{1}{x}dx$ は収束する．
(2) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$, $x\in(1,\infty)$ とおくと，特異点 $x=0$ と $x=\infty$ における広義積分である．そこで，$\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^\infty f(x)dx$ と二つの広義積分にわけて，それぞれの収束性を見ることにする．(i) $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ の収束性．$\sqrt{x-1}|f(x)|=\dfrac{1}{x}\le1$, $x\in(1,2]$ だから，再び**例題 4.14** (1) により，広義積分 $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ は収束する．(ii) $\displaystyle\int_2^\infty\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ の収束性． $x^{3/2}|f(x)|=\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}\leqq\sqrt{2}$, $x\in[2,\infty)$ となることから，**例題 4.14** (3) により，広義積分 $\displaystyle\int_2^\infty\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ は収束する．以上より，$\displaystyle\int_1^\infty\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ は収束する．

– 問 **4.12:** $f(t)=\sqrt{t}$ について，テイラーの定理を $n=3$ に対して適用する．$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$, $f''(t)=-\frac{1}{4t\sqrt{t}}, f'''(t)=\frac{3}{8t^2\sqrt{t}}$ に注意すると，

$$\sqrt{10}=f(10)=f(9)+(10-9)f'(9)+\frac{(10-9)^2}{2!}f''(9)+\frac{1}{3!}\int_9^{10}(10-t)^2f'''(t)dt$$
$$=3+\frac{1}{6}-\frac{1}{216}+\frac{1}{16}\int_9^{10}\frac{(10-t)^2}{t^2\sqrt{t}}dt\ =\frac{683}{216}+\frac{1}{16}\int_9^{10}\frac{(10-t)^2}{t^2\sqrt{t}}dt$$

ここで，$0\leqq\left(\frac{10-t}{t}\right)^2\leqq\frac{1}{81}$, $x\in[9,10]$ 及び $\sqrt{10}<4$ を用いると，

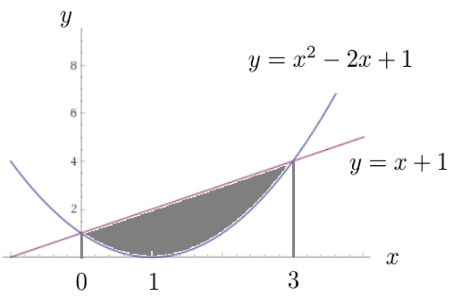
$$3.16203<\frac{683}{216}\leqq\sqrt{10}\leqq\frac{683}{216}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{81}\int_9^{10}\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{683}{216}+\frac{1}{1296}\cdot\frac{\sqrt{10}-3}{2}<\frac{683}{216}+\frac{1}{2592}<3.162423$$

という評価が得られる．$\sqrt{10}\fallingdotseq3.16228$ だから，小数点以下 4 桁までは合っていることが分かる．

– 問 **4.13:** (1) $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ (2) $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$ (3) $x-x^2+x^3$

– **問 4.14:** $0 \leqq x \leqq 3$ において，$x^2-2x+1 \leqq x+1$ より (右図)，囲まれる部分の面積を S とおくと，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \Big((x+1)-(x^2-2x-1)\Big)dx \\ &= \Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2+2x\Big]_0^3 = \frac{21}{2} \end{aligned}$$



第 5 章 多変数関数

– **問 5.1:** (1) $(2,6)$ (2) $\left(1,\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$ (3) $\left(\dfrac{1}{3},e^{1/2},\dfrac{5}{2}\right)$

– **問 5.2:** (1) 任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して，$x^2+3y^2 \leq 3(x^2+y^2)$ が成り立つことから，

$$0 \leqq \frac{x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 3\sqrt{x^2+y^2} \to 0, \quad (x,y)\to(0,0)$$

(2) 任意の非負実数 a,b,c に対して，$\sqrt[3]{abc} \leqq \dfrac{a+b+c}{3}$ が成り立つ．$a=x^2, b=y^2, c=z^2$ をこの不等式に代入すると，$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}$ だから，

$$0 \leq \left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| \leqq 3^{-3/2}\sqrt{x^2+y^2+z^2} \to 0, \quad (x,y,z)\to(0,0,0)$$

– **問 5.3:** – $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{x+2y}$ に対して，$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(x^2+5y^2+5y)e^{x+2y}$

– $f(x,y,z)=x\cos(yz)$ に対して，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\cos(yz)$，$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -xz\sin(yz)$

– **問 5.4:** (1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y\cos(xy)\cos(x+y)+\sin(xy)\sin(x+y)}{\cos^2(x+y)}$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x\cos(xy)\cos(x+y)+\sin(xy)\sin(x+y)}{\cos^2(x+y)}$

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{4x\tan(x^2-y^2)}{\cos^2(x^2-y^2)}$，$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-4y\tan(x^2-y^2)}{\cos^2(x^2-y^2)}$

– **問 5.5:** (1) $f_x = 2x+y^2\cos(xy)$，$f_y=\sin(xy)+xy\cos(xy)$

(2) $f_x = -\dfrac{2y}{(x-y)^2}$，$f_y = \dfrac{2x}{(x-y)^2}$

(3) $f_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$f_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$f_z = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

– **問 5.6:** $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\log(x^3+y) = -\dfrac{3x(x^3-2y)}{(x^3+y)^2}$

– **問 5.7:** $f(x,y)=e^{x+y}$ とおく．いま，$g(t)=e^t$，$t\in\mathbb{R}$ とおくと，$h,k\in\mathbb{R}$ に対して，

$$f(0+h,0+k)-f(0,0) = e^{h+k}-1 = (e^{h+k}-e^k)+(e^k-1) = e^k\big(g(h)-g(0)\big)+\big(g(k)-g(0)\big)$$

となる．(1 変数関数 g に対する) 平均値の定理を 0 と h の間の区間と，0 と k の間の区間にそれぞれ適用すると，

$$g(h)-g(0)=hg'(c_1), \quad g(k)-g(0)=kg'(c_2)$$

を満たす c_1 が 0 と h の間に，c_2 が 0 と k の間にあることが分かる．ところで，c_1, c_2 は，適当な $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ を用いて，$c_1 = \theta_1 h,\ c_2 = \theta_2 k$ と書けることに注意する． よって，

$$\begin{aligned} f(h,k) - f(0,0) &= e^{x+y} - 1 = e^k \cdot hg'(c_1) + kg'(c_2) = e^k \cdot he^{\theta_1 h} + ke^{\theta_2 k} \\ &= he^{\theta_1 h + k} + ke^{\theta_2 k} = hf(0+\theta_1 h, 0+k) + kf(0, 0+\theta_2 k) \end{aligned}$$

が成り立つ．

- **問 5.8:** $f_x = \cos y,\ f_y = -x\sin y$ より， $df = \cos y dx - x\sin y dy$
- **問 5.9:** (1) $F(x,y) = x^2 - y^2 + 5y - 4x$ とおくと，$F_x = 2x - 4,\ F_y = -2y + 5$. よって，陰関数の定理により，$y' = -\dfrac{F_x}{F_y} = \dfrac{2x-4}{2y-5}$
  (2) $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ とおくと，$F_x = 3x^2 - 3y,\ F_y = 3y^2 - 3x$. よって，陰関数の定理により，$y' = -\dfrac{F_x}{F_y} = \dfrac{x^2-y}{x-y^2}$
  (3) $F(x,y) = x^n + y^n - 10^n$ とおくと，$F_x = nx^{n-1},\ F_y = ny^{n-1}$. よって，陰関数の定理により，$y' = -\dfrac{F_x}{F_y} = -\dfrac{x^{n-1}}{y^{n-1}}$
- **問 5.10:** (1) $2y + 3x$ (2) $8\cos(xy + y^2) - (x^2 + 10xy + 25y^2)\sin(xy + y^2)$
  (3) $-\dfrac{8(x-y)(x^2+4xy+y^2)}{(x^2+y^2)^3}$
- **問 5.11:** (1) $f(x,y) = x^3 - 2xy^2$ は，すべての 4 階以上の高階の偏導関数は 0 であるから，$n = 3$ に対してテーラーの定理を適用する．$f_{xxy} = f_{yyy} = 0,\ f_{xxx} = 6,\ f_{xyy} = -4,\ R_4 = 0$ に注意すると，

$$\begin{aligned} x^3 - 2xy^2 = -1 &+ \Big\{(x-1) + 4(y+1)\Big\} + \frac{1}{2!}\Big\{6(x-1)^2 + 8(x-1)(y+1) - 4(y+1)^2\Big\} \\ &+ \frac{1}{3!}\Big\{6(x-1)^3 - 12(x-1)(y+1)^2\Big\} \\ = -1 &+ (x-1) + 4(y+1) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)(y+1) - 2(y+1)^2 \\ &+ (x-1)^3 - 2(x-1)(y+1)^2 \end{aligned}$$

  (2) 適当な $0 < \theta < 1$ があって，次のようになる．

$$\begin{aligned} e^x \cos y &= -e - e(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 e^{1+\theta(x-1)}\cos(\pi + \theta(y-\pi)) \\ &\quad + (x-1)(y-\pi)e^{1+\theta(x-1)}\sin(\pi + \theta(y-\pi)) - (y-\pi)^2 e^{1+\theta(x-1)}\cos(\pi + \theta(y-\pi)) \\ &= -e - e(x-1) - \frac{e}{2}(x-1)^2 e^{\theta(x-1)}\cos(\theta(y-\pi)) \\ &\quad - e(x-1)(y-\pi)e^{\theta(x-1)}\sin(\theta(y-\pi)) + e(y-\pi)^2 e^{\theta(x-1)}\cos(\theta(y-\pi)) \end{aligned}$$

- **問 5.12:** (1) $f_x = 2x - 3 + y = 0,\ f_y = -2y + 1 + x = 0$ を解くと，$(x,y) = (1,1)$ より，この点が極値の候補である．また， $f_{xx} = 2,\ f_{xy} = 1, f_{yy} = -1$ より，

$$f_{xy}(1,1)^2 - f_{xx}(1,1)f_{yy}(1,1) = 1 + 2 = 3 > 0$$

となる．**注意 5.3** (1) によって，$(1,1)$ では，極値とはならない．従って，与えられた関数は極値を持たない．

(2) 判定法を用いても確認できるが，不等式 $-x^2+2xy-3y^2=-(x-y)^2-2y^2 \leqq 0$ から，$(0,0)$ で極大かつ最大値 0 をとることが直接分かる．

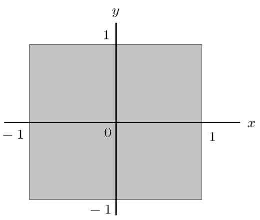
第 6 章 重積分

– **問 6.1:** $-\dfrac{1}{2}$ (解答は略)

– **問 6.2:** (1) 0 (2) $\log\dfrac{9}{8}$

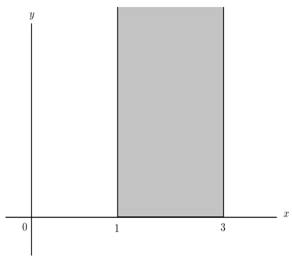
– **問 6.3:** (略)

– **問 6.4:** (1)



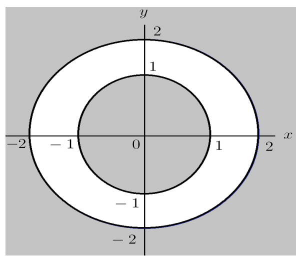
(境界は含む)

(2)



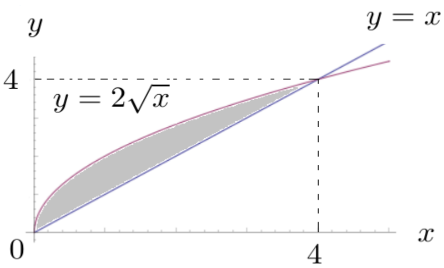
(境界は含まない)

(3)



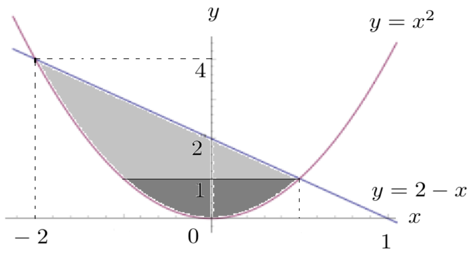
(境界は含まない)

– **問 6.5:** (1)



$$\int_0^4\Big(\int_{y^2/4}^{y} f(x,y)dx\Big)dy$$

(2)



$$\int_0^1\Big(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx\Big)dy+\int_1^4\Big(\int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx\Big)dy$$

– **問 6.6:** (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{1}{4}(e^{16}-1)$

– **問 6.7:** $\dfrac{2}{3}\pi a^3$

– **問 6.8:** (1) 発散 $\Bigg($ あるいは, 問の修正: $\displaystyle\iint_D \frac{\boldsymbol{xy}}{\boldsymbol{(x+y)^3}}\boldsymbol{dxdy},\ \boldsymbol{D=\{(x,y):\ 1\leqq x,\ 1\leqq y\}}$

$$\Longrightarrow \iint_D \frac{\boldsymbol{xy}}{\boldsymbol{(x^2+y^2)^3}}\boldsymbol{dxdy},\ \boldsymbol{D=\{(x,y):\ 0\leqq x,\ 0\leqq y,\ 1\leqq x^2+y^2\}}\Bigg)$$

(修正した問の略解) $D_n=\{(x,y): 0\leqq x, 0\leqq y,\ 1\leqq x^2+y^2\leqq n^2\}$ とおくと，$\{D_n\}$ は D の近似増加列となる．D_n 上で極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を行うと，

$$\iint_{D_n}\frac{xy}{(x^2+y^2)^3}dxdy=\frac{1}{2}\Big(\int_0^{\pi/2}\sin(2\theta)d\theta\Big)\Big(\int_1^n r^{-3}dr\Big)=\frac{1}{4}(1-n^{-2})$$

となる．よって，$n\to\infty$ とすると $\displaystyle\iint_D\frac{xy}{(x^2+y^2)^3}dxdy=\frac{1}{4}$.

(2) $D_n = \{(x,y) : 0 \leqq x, 0 \leqq y,\ x^2+y^2 \leqq n^2\}$ とおくと，$\{D_n\}$ は D の近似増加列となる．D_n 上で極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を行うと，

$$\iint_{D_n} x^2 e^{-x^2-y^2}dxdy = \Big(\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta\Big)\Big(\int_0^n r^3 e^{-r^2}dr\Big) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2}\big(1-(1+n^2)e^{-n^2}\big)$$

となる．よって，$n \to \infty$ とすると $\displaystyle\iint_D x^2 e^{-x^2-y^2}dxdy = \frac{\pi}{8}$.

第 7 章 級 数

- 問 **7.1:** 省略
- 問 **7.2:** (1) 発散（公比: $\sqrt{5}$） (2) 発散（公比: $\sqrt{2}$） (3) $1-\dfrac{7\sqrt{2}}{5}$ （公比: $1-\sqrt{2}$）

  (4) $-\dfrac{1}{37}$ $\Big(\cos\dfrac{n\pi}{2}$ は，$n=2m$ (偶数) のときは $(-1)^m$, $n=2m-1$ (奇数) のときは 0 であることに注意する． したがって，偶数のときには公比: $-\dfrac{1}{36}\Big)$
- 問 **7.3:** (1) 条件収束する $\Big(a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+3}$ とおくと，$|a_n| \geqq \dfrac{1}{3(n+1)}$ かつ $a_n \to 0\ (n\to\infty)\Big)$

  (2) 条件収束する $\Big(a_n = \dfrac{(-1)^n}{\log(n+1)}$ とおくと，$|a_n| \geqq \dfrac{1}{n+1}$ かつ $a_n \to 0\ (n\to\infty)\Big)$

  (3) 条件収束する $\Big(a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+3/n}$ とおくと，$|a_n| \geqq \dfrac{1}{n+3}$ かつ $a_n \to 0\ (n\to\infty)\Big)$

  (4) 絶対収束する $\Big(a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+n}$ とおくと，$|a_n| \leqq \dfrac{1}{n^2}\Big)$
- 問 **7.4:** (1) 0 に一様収束する $\Big(\Big|\dfrac{x^n}{n}-0\Big| \leq \dfrac{1}{n},\ x\in[0,1]\Big)$

  (2) 0 に一様収束する $\Big(\Big|\dfrac{1}{n}e^{-nx^2}-0\Big| \leq \dfrac{1}{n},\ x\in[0,\infty)\Big)$

第 8 章 微分方程式

- 問 **8.1:** (1) $y(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}\log(x^2+1) + x + C$ (2) $y(x) = \dfrac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x^3 + C_1x + C_2$
- 問 **8.2:** $y(x) = \pm\sqrt{\dfrac{Ce^{2x^2}}{Ce^{2x^2}-1}}$，または $\log\Big(\dfrac{y(x)^2}{1+y(x)^2}\Big) = 2x^2 + \tilde{C}$
- 問 **8.3:** $\big(y(x)-2x\big)^2\big|y(x)+x\big| = C$ $\Big(y = ux$ とおくと，与えられた微分方程式は $\dfrac{u'u}{u^2-u-2} = -\dfrac{1}{x}$ となる $\Big)$
- 問 **8.4:** $x>0$ より，与えられた微分方程式は，線形微分方程式 $y' + \dfrac{y}{x} = 2x$ となる．まず，同次形 $y' = -\dfrac{y}{x}$ を解くと， $y(x) = \dfrac{C}{x}$ である．これを，定数変化法を用いて $y(x) = \dfrac{u(x)}{x}$ として，x について微分すると，$y' = \dfrac{u'x-u}{x^2}$. これを，与式の微分方程式に代入すると，$u' = 2x^2$ となる．これを解くと $u(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + C$. よって，$y(x) = \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{C}{x}$.
- 問 **8.5:** 与式の微分方程式は $dy + \dfrac{2}{x^2}dx = 0$ である．よって，$y - \dfrac{2}{x} = C$.

(以上)