# 数理統計基礎演習 第二回 小テスト

’04/16/Nov

[1] 確率変数 $X, Y$ の同時確率分布が以下の表となっているとき，次の値を求めなさい．

| | | $x$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $p(x,y)$ | $-1/2$ | $0$ | $1/2$ | $1$ |
| | $-1$ | 0.1 | 0 | 0.1 | 0.1 |
| $y$ | $-1/2$ | 0.1 | 0 | 0.1 | 0.1 |
| | $0$ | 0 | 0.1 | 0 | 0 |
| | $1/2$ | 0.1 | 0 | 0.1 | 0.1 |

(1) $\mathbb{P}(X > Y)$　(2) $\mathbb{P}(X > 0,\, Y > 0)$　(3) $\mathbb{P}(XY > 0)$　(4) $\mathbb{E}[X]$　(5) $\mathrm{Cov}(X, Y)$

[2] $X, Y, Z$ を独立な確率変数とし，

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0, \quad \mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[Y] = 1, \quad \mathbb{E}[Z] = 3, \quad \mathbb{V}[Z] = 2$$

が成立しているとする．このとき，以下の値を求めなさい．

(1) $\mathbb{E}[X - Y]$　(2) $\mathbb{V}[X - Y]$　(3) $\mathbb{E}[2Z]$　(4) $\mathbb{V}[X + 3Y - 5Z]$　(5) $\mathrm{Cov}(X, X + 3Y - 5Z)$

[3] $\{X_n\}$ を独立な確率変数列とし，

$$\mathbb{E}[X_i] = \mu_i, \quad \mathbb{V}[X_i] \le L \ (L \text{ は正定数}),\ i = 1, 2, \ldots$$

を満たすとするとき，勝手な $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i) \right| > \varepsilon \right) = 0$$

となることを示しなさい．[1]

[4] 確率変数 $X, Y, Z$ は，全て標準正規分布に従う正規母集団からの無作為抽出とする．このとき $X^2 + Y^2 + Z^2$ は，どのような分布に従っているか述べなさい．また，確率変数 $X^2$ の密度関数 $f_{X^2}(x)$ を導出しなさい．

---

[1] チェビシェフの不等式を思い出す

[5] 次の問に答えなさい.

(1) $X \sim \mathrm{Bi}(10, 0.5),\ Y \sim \mathrm{Bi}(15, 0.5)$ とし，$X, Y$ を独立であるとする．このとき， $X+Y$ の分布を求めなさい.

(2) 標準正規分布に従う大きさ 15 の無作為標本の最大値が 0 以下となる確率を求めなさい.

[6] $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を平均 $\mu_1$，分散 $\sigma^2$ を持つ正規母集団からの無作為標本，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ を平均 $\mu_2$，分散 $\sigma^2$ をもつ正規母集団からの無作為標本とする．また,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \bar{Y}_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} Y_i$$

$$U_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2, \quad U_Y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_m)^2$$

とおく．このとき，以下の問に答えなさい.

(1) 標本平均 $\bar{X}_n$ と不偏分散 $U_X^2$ は独立となることを示しなさい.

(2) $\bar{X}_n + \bar{Y}_m,\ \bar{X}_n - \bar{Y}_m$ はどんな分布に従うか？

(3) $U_X^2 / U_Y^2$ はどんな分布に従うか？